Nejprve si odvodíme dva vztahy, které v řešení použijeme. Předně moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru a kolem osy procházející jejím středem je

$$I = \int_0^a d^2 \rho \mathrm{d}V = \int_0^a d^2 \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}(2\pi d)\left(2\sqrt{a^2-d^2}\right)\mathrm{d}d = \frac{3m}{a^3}\int_0^a d^3\sqrt{a^2-d^2}\mathrm{d}d$$
$$= \frac{3m}{a^3}\int_0^a y^2(a^2-y^2)\mathrm{d}y = \frac{3m}{a^3}\frac{2}{15}a^5 = \frac{2}{5}ma^2,$$

kde jsme substituovali $y = \sqrt{a^2-d^2}$.

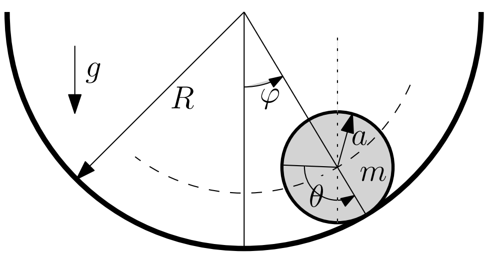
Dále chceme ukázat, že kinetická energie tuhého tělesa o hmotnosti m je

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2,$$

kde v je rychlost hmotného středu, Ω úhlová rychlost otáčení kolem osy procházející hmotným středem a I moment setrvačnosti kolem této osy. Zaveďme $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_S$, kde $\boldsymbol{r}_i$ je poloha i-té částice v tuhém tělesu a $\boldsymbol{r}_S$ je poloha hmotného středu. Je tedy

$$\begin{aligned}
T &= \sum \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_S + \dot{\boldsymbol{r}}_i')^2 \\
&= \sum \frac{1}{2}m_i\dot{r}_S^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i'^2 + \sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_S\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i' \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \sum \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i')^2 + \sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_S\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i') \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\Omega^2 r_i'^2\sin^2\alpha_i + \sum m_i\boldsymbol{r}_i'\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_S\times\boldsymbol{\Omega}) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \sum \frac{1}{2}m_i d_i^2\Omega^2 + 0\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_S\times\boldsymbol{\Omega}) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2,
\end{aligned}$$

kde α_i je úhel mezi vektory $\boldsymbol{\Omega}$ a $\boldsymbol{r}_i'$ a d_i je vzdálenost i-tého bodu od osy otáčení.



A teď již k samotnému příkladu. Na kouli působí centrální síla a celý pohyb bude proto rovinný, pokud počáteční rychlost koule bude nulová, což budeme předpokládat. Obrázek zachycuje právě tuto rovinu. Mezi oběma souřadnými úhly vyznačenými v obrázku existuje vazebná podmínka

$$\theta a = \varphi R,$$

protože koule podle zadání neprokluzuje.

Kinetická energie koule je podle výše dokázaného

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta - \varphi)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{5}ma^2\left(\frac{R}{a} - 1\right)^2\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{7}{10}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Potenciální gravitační energie je zřejmě

$$V = mg(R-a)(1 - \cos\varphi) \doteq mg(R-a)\frac{\varphi^2}{2},$$

kde jsme $\cos\varphi$ rozvinuli do druhého řádu kolem nuly, jelikož se zajímáme jen o malé kmity. Lagrangián je tedy

$$L = \frac{7}{10}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mg(R-a)\varphi^2.$$

Lagrangeova pohybová rovnice 2. druhu je tak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{7}{5}m(R-a)^2\ddot{\varphi} + mg(R-a)\varphi = 0,$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-a}\varphi = 0,$$

z čehož úhlová frekvence malých kmitů je $\omega^2 = 5g/7(R-a)$ a perioda tedy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-a}{g}}.$$