

1. Zavedme kartézský systém souřadnic (x, y) s počátkem na tyčce tak, že gravitační zrychlení míří ve směru $-y$. Celá úloha má translační symetrii podél souřadnice z , takže poloha počátku na tyčce je irelevantní. Dále zvolme, že $z = 0$ odpovídá $x = y = 0$.

Označme polohu závěsu (X, Y) a závaží (x, y) . Potom zřejmě platí

$$\begin{aligned} X &= z \cos \alpha, & x &= z \cos \alpha - l \sin \varphi, \\ Y &= -z \sin \alpha, & y &= -z \sin \alpha - l \cos \varphi, \\ \dot{X} &= \dot{z} \cos \alpha, & \dot{x} &= \dot{z} \cos \alpha - l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= -\dot{z} \sin \alpha, & \dot{y} &= -\dot{z} \sin \alpha + l \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Lagrangián je

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - mgy - MgY \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 \cos^2 \alpha + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi - 2l\dot{\varphi}\dot{z} \cos \alpha \cos \varphi \\ &\quad + \dot{z}^2 \sin^2 \alpha + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - 2l\dot{\varphi}\dot{z} \sin \alpha \sin \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2}M(\dot{z}^2 \cos^2 \alpha + \dot{z}^2 \sin^2 \alpha) + mg(z \sin \alpha + l \cos \varphi) + Mgz \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(m + M)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m[l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l\dot{\varphi}\dot{z} \cos(\varphi - \alpha)] + (m + M)gz \sin \alpha + mgl \cos \varphi. \end{aligned}$$

2. Nejprve spočítáme všechny potřebné derivace. Je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{d}{dt} [(m + M)\dot{z} - ml\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha)] \\ &= (m + M)\ddot{z} - ml[\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha)], \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= (m + M)g \sin \alpha, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\varphi} - ml\dot{z} \cos(\varphi - \alpha)] \\ &= ml^2 \ddot{\varphi} - ml[\ddot{z} \cos(\varphi - \alpha) - \dot{\varphi}\dot{z} \sin(\varphi - \alpha)], \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ml[\dot{\varphi}\dot{z} \sin(\varphi - \alpha) - g \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Z toho pohybové rovnice jsou

$$\begin{aligned} (m + M)(\ddot{z} - g \sin \alpha) - ml[\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha)] &= 0, \\ l\ddot{\varphi} - \ddot{z} \cos(\varphi - \alpha) + g \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Pro rovnovážnou polohu máme $\varphi = \varphi_0$ a $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Dosazením do (1) je

$$\begin{aligned} \ddot{z} - g \sin \alpha &= 0, \\ -\ddot{z} \cos(\varphi_0 - \alpha) + g \sin \varphi_0 &= 0, \end{aligned}$$

z čehož

$$\begin{aligned}\sin \varphi_0 &= \sin \alpha \cos(\varphi_0 - \alpha), \\ \sin \varphi_0(1 - \sin^2 \alpha) &= \cos \varphi_0 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \operatorname{tg} \alpha, \\ \varphi_0 &= \alpha.\end{aligned}$$

4. Dosazením $\varphi = \alpha + \varepsilon$ do (1), rozvinutím do prvního řádu podle ε a zanedbáním $\varepsilon^2\varepsilon$ dostaneme¹

$$(m + M)(\ddot{z} - g \sin \alpha) - ml\ddot{\varepsilon} = 0, \quad (2)$$

$$l\ddot{\varepsilon} - \ddot{z} + g(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) = 0. \quad (3)$$

5. Z (2) vyjádříme

$$\ddot{z} - g \sin \alpha = \frac{m}{m + M}l\ddot{\varepsilon} \quad (4)$$

a dosazením do (3) dojdeme k

$$\begin{aligned}l\ddot{\varepsilon} - \frac{m}{m + M}l\ddot{\varepsilon} + g\varepsilon \cos \alpha &= 0, \\ \ddot{\varepsilon} + \frac{m + M}{M} \frac{g \cos \alpha}{l} \varepsilon &= 0,\end{aligned}$$

což je hledaná rovnice harmonických kmitů. Jejím řešením s nulovou počáteční rychlostí a maximální počáteční výchylkou ε_0 je

$$\varphi(t) = \alpha + \varepsilon_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{m + M}{M} \frac{g \cos \alpha}{l}} \right) = \alpha + \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

Dvojnásobnou derivací ε podle času a dosazením do (4) potom

$$\ddot{z} = g \sin \alpha - \varepsilon_0 \frac{m}{M} g \cos \alpha \cos \omega t.$$

Tuto rovnici dvakrát zintegrujeme podle času, přičemž ponecháme volnot v počáteční poloze a počáteční rychlost položíme rovnou nule.² Dostaneme tak

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + \varepsilon_0 \frac{m}{m + M}l \cos \omega t + C,$$

kde C je nějaká konstanta.

¹Zde předpokládáme, že pokud je ε malé, je (v řádovém smyslu) malé i $\dot{\varepsilon}$, což je pro harmonický oscilátor dobrý předpoklad. Potom je uvažovaný člen vlastně třetího řádu v ε .

²Tím máme celou soustavu v počátku v klidu a polohu závěsu nakonec zvolíme tak, aby těžiště celé soustavy bylo v čase $t = 0$ v $z = 0$, což je hlavně estetická záležitost.

6. Pro x -ovou souřadnici hmotného středu máme

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{mx + MX}{m + M} = \frac{Mz \cos \alpha + m(z \cos \alpha - l \sin \varphi)}{m + M} \\ &= \frac{1}{m + M} \left[(m + M) \cos \alpha \left(\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + \varepsilon_0 \frac{m}{m + M} l \cos \omega t + C \right) \right. \\ &\quad \left. - ml(\sin \alpha + \varepsilon_0 \cos \alpha \cos \omega t) \right] \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha + C \cos \alpha - \frac{m}{m + M} l \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

kde jsme položili

$$C = \frac{m}{m + M} l \operatorname{tg} \alpha.$$

Vidíme tedy, že hmotný střed se pohybuje dle očekávání jako hmotný bod na tyčce.

7. Zobecněné hybnosti jsme spočítali již při odvození Lagrangeových rovnic, zde jen shrneme

$$p_z = (m + M)\dot{z} - ml\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha), \quad p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} - ml\dot{z} \cos(\varphi - \alpha).$$

Hamiltonián vyjádřený pomocí rychlostí je tak

$$\begin{aligned} H &= p_z \dot{z} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \\ &= \frac{1}{2}(m + M)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m[l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{\varphi}\dot{z} \cos(\varphi - \alpha)] \\ &\quad - (m + M)gz \sin \alpha - mgl \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Hamiltonián v zadání

$$H = \frac{p_z^2 + \frac{m+M}{ml^2} p_\varphi^2 + \frac{2}{l} p_z p_\varphi \cos(\varphi - \alpha)}{2[M + m \sin^2(\varphi - \alpha)]} - (M + m)gz \sin \alpha - mgl \cos \varphi \quad (6)$$

ověříme tak, že hybnosti vyjádříme pomocí rychlostí a dojdeme k (5). Spočtětme kvadratické členy s hybnostmi

$$\begin{aligned} p_z^2 &= (m + M)\dot{z}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi - \alpha) - 2(m + M)ml\dot{\varphi}\dot{z} \cos(\varphi - \alpha), \\ p_\varphi^2 &= m^2l^4\dot{\varphi}^2 + m^2l^2\dot{z}^2 \cos^2(\varphi - \alpha) - 2m^2l^3\dot{\varphi}\dot{z} \cos(\varphi - \alpha), \\ p_z p_\varphi &= [(m + M)ml^2 - m^2l^2 \cos^2(\varphi - \alpha)]\dot{\varphi}\dot{z} \\ &\quad - (m + M)ml\dot{z}^2 \cos(\varphi - \alpha) - m^2l^3\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Dosazením do (6) a prostými algebraickými úpravami dojdeme k čitateli ve tvaru

$$[M + m \sin^2(\varphi - \alpha)][(m + M)\dot{z}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2 - 2ml\dot{\varphi}\dot{z} \cos(\varphi - \alpha)],$$

což dá po zkrácení kýžený tvar (5). Hamiltonián v zadání je tedy správný.

8. Hamiltonovy kanonické rovnice jsou

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z + \frac{\cos(\varphi-\alpha)}{l} p_\varphi}{M + m \sin^2(\varphi - \alpha)}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\frac{m+M}{ml^2} p_\varphi + \frac{\cos(\varphi-\alpha)}{l} p_z}{M + m \sin^2(\varphi - \alpha)}, \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = (m + M)g \sin \alpha\end{aligned}$$

a pro výpočet poslední rovnice využijeme raději tvaru (5)

$$\begin{aligned}\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -ml[\dot{\varphi}z \sin(\varphi - \alpha) + g \sin \varphi] \\ &= -\frac{\sin(\varphi - \alpha)\left(p_z + \frac{\cos(\varphi-\alpha)}{l} p_\varphi\right)\left(mp_z \cos(\varphi - \alpha) + \frac{m+M}{l} p_\varphi\right)}{[M + m \sin^2(\varphi - \alpha)]^2} - mgl \sin \varphi.\end{aligned}$$