Na začátku uvedeme vztahy ze zadání, na které se později budeme odkazovat.

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = 0, \\ &x_c = a\cos M\cos i, \quad y_c = a\sin M, \quad z_c = a\cos M\sin i, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{3}$$

$$M = E - \varepsilon\sin E. \tag{4}$$

1. Nejprve si z (1) vyjádříme r_p, r_a z obrázku v zadání. Pro $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ tak máme

$$r_p = a(1-\varepsilon), \quad r_a = a(1+\varepsilon).$$

Užitím kosinové věty na oba trojúhelníky z obrázku máme dvě rovnice

$$(1\pm\varepsilon)^2 = 1 \pm \frac{v}{a} + \frac{v^2}{a^2}.$$

Sečtením, resp. odečtením těchto dvou rovnic můžeme nyní dostat $\varepsilon = v/a$, resp. $\varepsilon = v/2a$. Tato nejednoznačnost je způsobena tím, že pohyb satelitu není přesně kružnice se středem v C. Vzdálenost v proto není konstantní a obrázek v zadání je pouze přiblížení. Chceme tedy zanedbat vyšší řády v a rovnice budeme odečítat. Dostáváme tak

$$\varepsilon = \frac{v}{2a}.$$

Opět z obou trojúhelníků a tentokrát sinové věty dostaneme

$$a(1\pm\varepsilon)\sin i = \frac{\sqrt{3}}{2}v,$$

z nichž můžeme dostat různé výsledky, přičemž nás zajímá

$$\sin i = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{a} = \sqrt{3}\,\varepsilon\,. \tag{5}$$

2. Z Pythagorovy věty a (2) máme

$$\begin{aligned} d^2 &= (r\cos\varphi - a\cos M\cos i)^2 + (r\sin\varphi - a\sin M)^2 + (a\cos M\sin i)^2 \\ &= r^2 + a^2 - 2ar(\sin\varphi\sin M - \cos\varphi\cos M\cos i). \end{aligned} \tag{6}$$

Z (5) je

$$\cos i = \sqrt{1-3\,\varepsilon^2}. \tag{7}$$

Užitím (3) a

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

máme

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1-\cos E}{1+\cos E},$$

z čehož

$$\cos\varphi=\frac{\cos E-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos E}$$

a užitím $\sin^2+\cos^2=1$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{\sin E}{1-\varepsilon\cos E}.$$

Dosazením těchto vztahů, (7), (4) a (1) do (6) potom

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{a^2}=1+(1-\varepsilon\cos E)^2-2\Big[&\sqrt{1-3\,\varepsilon^2}(\cos E-\varepsilon)\cos(E-\varepsilon\sin E)\\ &+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin E\sin(E-\varepsilon\sin E)\Big].\end{aligned}$$

Pravou stranu rozvineme do druhého řádu podle ε jako

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{a^2}&=2-2\,\varepsilon\cos E+\varepsilon^2\cos^2 E\\ &\quad-2\Big[(1-\tfrac{3}{2}\,\varepsilon^2)(\cos E-\varepsilon)(\cos E+\varepsilon\sin^2 E-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\sin^2 E\cos E)\\ &\quad+(1-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2)\sin^2 E(1-\varepsilon\cos E-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\sin^2 E)\Big]+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\ &=2-2\,\varepsilon\cos E+\varepsilon^2\cos^2 E-2\Big[\cos^2 E+\varepsilon(\sin^2 E\cos E-\cos E)\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2(-3\cos^2 E-\sin^2 E\cos^2 E-2\sin^2 E)\\ &\quad+\sin^2 E+\varepsilon(-\sin^2 E\cos E)+\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2(-\sin^4 E-\sin^2 E)\Big]+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\ &=2-2\,\varepsilon\cos E+\varepsilon^2\cos^2 E\\ &\quad-2\big[1-\varepsilon\cos E-\varepsilon^2(3+\sin^2 E)\big]+\mathcal{O}(\varepsilon^3)=4\,\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Z toho

$$d=2\,\varepsilon\,a+\mathcal{O}(\varepsilon^2)=v+\mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

a pohyb satelitu je skutečně nejhůř v prvořádovém[1] přiblížení kružnice se středem v bodě C. (Který se ovšem pohybuje po kružnici se středem v Slunci.)

[1]Ověření druhého řádu v ε odkazuje svojí pracností na použití matematického softwaru.