Obrázek 1: Průběh $V(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

1. Průběh potenciální energie $V(x)$ je pro $D = \alpha = 1$ naznačen na Obr. 1. Hodnoty obou konstant mají vliv zřejmě jen na měřítko os x a y . Potenciál roste pro záporná x exponenciálně k nekonečnu, tedy $\lim_{x \rightarrow -\infty} V = \infty$. Pro kladná x se potenciál blíží k nule, tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} V = 0$. Je

$$V' = -2\alpha D (e^{-2\alpha x} - e^{-\alpha x}),$$

tedy $V' = 0$ jen pro $x = 0$ a lokální extrém může být pouze v počátku, kde je skutečně minimum.

2. Rozvojem V do druhého řádu v $x = 0$ dostaneme

$$V \approx D (1 - 2\alpha x + 2\alpha^2 x^2 - 2(1 - \alpha x + \alpha^2 x^2/2)) = D (-1 + \alpha^2 x^2),$$

což je až na konstantu potenciál harmonického oscilátoru. Působící síla je tedy $F = -V' = -2D\alpha^2 x$ a z toho perioda malých kmitů je

$$T_h = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2D}}.$$

3. Hledáme body, ve kterých má částice nulovou kinetickou energii. Zřejmě

$$E = V = D (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$$

je kvadratická rovnice pro $e^{-\alpha x}$, jejímž řešením a vyjádřením x dostaneme

$$x_{1,2} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{D}} \right),$$

kde obě řešení mají smysl zřejmě jen pro¹ $E > -D$ a řešení s „-“ dokonce jen pro² $0 > E > -D$.

¹System vůbec existuje.

²Částice s $E \geq 0$ nemá „pravý“ bod obratu.

4. Ze zákona zachování energie $E = T + V$ si vyjádříme

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - D (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})]}, \quad (1)$$

z čehož

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})}} = dt$$

a konečně rozšířením levé strany $e^{\alpha x}$ a substitucí $y = e^{\alpha x}$ dostaneme

$$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dy}{\sqrt{E y^2 + 2Dy - D}} = dt. \quad (2)$$

Integrace³ nám nyní řešení rozdělí na tři případy podle znaménka koeficientu u kvadratického členu, tedy E .

a) $E = 0$. Tento případ je zřejmě nejjednodušší, protože

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2Dy - D}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{2y - 1} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{2e^{\alpha x} - 1}.$$

Dosazením do (2) a vyjádřením x dostaneme

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 D t^2}{m} \right).$$

Asymptotické chování v $t \rightarrow \pm\infty$ je potom zřejmě

$$x \approx \frac{2}{\alpha} \ln \left(\alpha |t| \sqrt{\frac{D}{m}} \right),$$

což potvrzuje naše očekávání, jelikož rychlost jde k nule, což musí, protože kinetická energie jde k nule.

b) $E > 0$. Zde upravíme hlavní zlomek v levé části (2) na tvar

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2\gamma y + \gamma^2 - \gamma^2 - \gamma}},$$

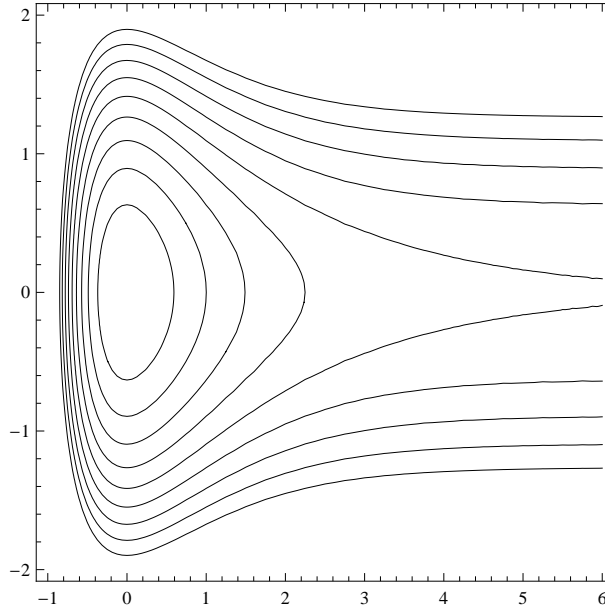
kde $\gamma = D/E$. Nyní již snadno zintegrujeme

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y + \gamma)^2 - \gamma(\gamma + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{E}} \operatorname{argcosh} \frac{y + \gamma}{\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}}.$$

Opět dosazením do (2) a vyjádřením x máme

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{D}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{E}{D}} \cosh \left(\alpha t \sqrt{\frac{2E}{m}} \right) - 1 \right) \right].$$

³Integrační konstantu vždy položíme rovnou nule, jelikož zřejmě jen posouvá celou trajektorii podél časové osy.



Obrázek 2: Fázový diagram systému

Limitou pro $t \rightarrow \pm\infty$ potom přejdeme k

$$x \approx |t| \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

což opět potvrzuje naši intuici, jelikož v nekonečnu má částice kinetickou energii E a musí se tedy pohybovat konstantní rychlostí úměrné \sqrt{E} , čemuž lineární trajektorie zřejmě odpovídá.

c) $E < 0$. Tady můžeme postupovat zcela analogicky jako v (b), jen pod odmocninou dostaneme $1 - y^2$ místo $y^2 - 1$, což zapříčiní výsledek ve tvaru

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{D}{|E|} \left(\sqrt{1 - \frac{|E|}{D}} \sin \left(\alpha t \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \right) + 1 \right) \right].$$

Z toho zřejmě perioda kmitů je

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2|E|}},$$

z čehož

$$\frac{T}{T_h} = \sqrt{\frac{D}{|E|}}$$

a tedy správnost T_h je tím menší, čím je E větší, jak bychom očekávali.

5. Fázový diagram dostaneme snadno z (1). Na Obr. 2 jsou vyneseny trajektorie pro $D = \alpha = 1$ a $E \in \{0.2k\}_{k=-4}^4$.