Pracovní úkol

1. Na optickém stole je sestaven Koherentní optický procesor. Na obrázku v „Pokynech k měření“ (nebo skripta str. 188) je vyznačeno schematické uspořádání a vyznačeny ohniskové délky čoček, které jsou v úloze k dispozici. Ověřte, zda čočky $\check{C}_1$ a $\check{C}_2$ zachovávají rovnoběžnost paprsků. Spočtěte a ověřte rozšíření paprsku použitým teleskopem. Změřte zvětšení obrazu předmětu v rovině P_3 a zvětšení obrazu Fourierova spektra v rovině P_4.

2. Pozorujte Fourierovský obraz následujících tří předmětů umístěných v rovině P_1:
   - čtvercového otvoru
   - soustavy rovnoběžných pruhů
   - síťky

3. Proměřte Fourierova spektra těchto předmětů v rovině P_2 nebo P_4 a z naměřených údajů vypočítejte rozměry předmětů, tj. velikost stran čtvercového otvoru, šířku a periodu soustavy rovnoběžných pruhů a periodu a šířku pruhů síťky.

4. Parametry předmětů z úkolu 2 změřte mikroskopem, který je v úloze č. 6, č. 30 nebo č. 14. Porovnejte hodnoty vypočtené z Fourierova spektra s přímým měřením mikroskopem.

5. Po dohodě s vyučujícím vyberte a kvalitativně ověřte některou z vlastností Fourierovy transformace, které jsou uvedeny v odd. 4.10.2 části I skript nebo na www.

6. V rovině P_2 umístěte vybraný předmět. Do roviny P_2 vkládejte různé filtry a zkoumejte jejich vliv na geometrický obraz v rovině P_3. Pozorované jevy vysvětlete.

Teoretický úvod

Soustava dvou čoček, které mají jedno z ohnisek ve společném geometrickém bodě, má příčné zvětšení

$$Z = -\frac{f_2}{f_1} \tag{1}$$

kde f_1, f_2 jsou ohniskové vzdálenosti první a druhé čočky.

Podle [1] platí, že čočka vytváří ve své ohniskové rovině obrazec úměrný Fourierově transformaci vzoru. Optickým koherentním procesorem se nazývá optická aparatura, která osvětluje objekt monochromatickým koherentním světlem, provádí jeho Fourierovu transformaci výše zmíněným způsobem a tuto pak převádí zpět na původní obraz. V rovině transformace lze obraz vhodně upravit neboli procesovat, odtud název.

Pro některé jednoduché tvary lze podle [1] odvodit vztahy popisující jejich fourierovský obraz. Ve všech případech se vyskytuje výraz

$$d(x) = \frac{\lambda f}{x} \tag{2}$$

kde λ je vlnová délka použitého světla, f je ohnisková vzdálenost použité čočky a x je nějaký rozměr předmětu. Pro obdélník o stranách a, b dostaneme body na vodorovné a svislé čáře procházející středem, které jsou od sebe vzdáleny $d(a)$, $d(b)$.[1] Pro svislé čáry vzdálené od sebe l dostaneme vodorovnou sadu bodů o vzdálenosti $d(l)$ a pro mříž to stejné ovšem jako dvourozměrnou síť bodů.

Fourierova transformace komplexní funkce g je funkce

$$\mathcal{F}g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-2\pi i f x}\mathrm{d}x$$

a má řadu výhodných matematických vlastností. Fyzicky ověříme dvě z nich a sice

$$\mathcal{F}\mathcal{F}g(x) = g(-x) \tag{3}$$
$$\mathcal{F}\{g * h\} = \mathcal{F}g\mathcal{F}h \tag{4}$$

kde první uvedená je zřejmá a druhá je transformace konvoluce. Ta se fyzicky realizuje umístěním g jako obrazu a h do roviny transformace v optickém procesoru.

Výsledky měření

Celá úloha je spíše kvalitativního charakteru, a proto budeme i číselné výsledky uvádět bez experimentální chyby s tím, že přesnost je přibližně několik jednotek poslední platné číslice.

Nejprve jsme vzdálensot čoček $\check{C}_1$ a $\check{C}_2$ nastavili tak, aby byl Fourierovský obraz na stínítku P_2 ostrý. Provizorní teleskop potom zároveň dobře zachovával rovnoběžnost paprsku, což jsme ověřili pohybem stínítka skrz celou jeho dráhu. Optickou mohutnost $\check{C}_1$ jsme změřili fokometrem jako 6.65 D, čemuž odpovídá ohnisková vzdálenost $f_1 = 15.0\,\mathrm{cm}$. Ohnisková vzdálenost $\check{C}_2$ je podle výrobce $f_2 = 2.5\,\mathrm{cm}$. Výsledné příčné zvětšení je tak podle (1)

$$Z = 6.0$$

[1] Ve skutečnosti jsou obě čáry modulovány funkcí sinc, jejíž minima jsou v $\lambda f k/a$, $\lambda f k/a$, $k \in Z\backslash\{0\}$ a maxima přibližně mezi nimi.

což jsme řádově ověřili. Šířka svazku je okem velmi subjektivní veličina, a proto se nám nepodařilo naměřit kvantitativní výsledek.

Pomocí obrazu dvou bodů jsme změřili zvětšení mezi P_3 a P_1 jako

$$Z_{13} = \frac{1.25\,\mathrm{cm}}{1.05\,\mathrm{cm}} = 1.2$$

Pomocí mřížky jsme změřili zvětšení mezi P_4 a P_2 jako

$$Z_{24} = \frac{12.0\,\mathrm{cm}/2}{3.4\,\mathrm{cm}/6} = 10.6$$

Pozorovali jsme fourierovské obrazy obdélníku, rovnoběžných pruhů a mřížky v rovině P_4. Skutečnou velikost jsme přepočítali naměřeným zvětšením Z_{24}. U obdélníku jsme pro horizontální čáru napočítali vzdálenost 10. vedlejšího maxima vlevo i vpravo od středu jako 2.3 cm, což odpovídá 21 rozestupům uvedeným v teoretickém úvodu. Z toho podle (2)

$$a = 2.6\,\mathrm{mm}$$

a podobně pro svislý směr jsme naměřili 2.7 cm, z čehož

$$b = 2.2\,\mathrm{mm}$$

V případě rovnoběžných pruhů jsme naměřili vzdálenost světlých bodů 10.7 cm, což dává jejich vzdálenost

$$l = 107\,\mu\mathrm{m}$$

a v případě mřížky 12.0 cm, což dává mřížkový parametr

$$m = 96\,\mu\mathrm{m}$$

Výše uvedené parametry jsmě změřili též pomocí mikroskopu. Obdélník byl trochu širší i vyšší uprostřed, uvádíme proto v závorce i krajní hodnoty.

$$a = 2.82\,(2.44, 2.71)\,\mathrm{mm}, \qquad b = 2.22\,(2.17, 2.14)\,\mathrm{mm}$$
$$l = 102\,\mu\mathrm{m}, \qquad m = 93\,\mu\mathrm{m}$$

Do roviny P_1 jsme vložili nesymetrický objekt a v rovině P_3 pozorovali jeho invertovaný obraz. Tím jsme ověřili vlastnost (3). Do roviny P_1 jsme vložili trojúhelník, do roviny P_2 mřížku a v rovině P_3 pozorovali síť na jejichž uzlech nebyly body, ale trojúhelníky. To přesně odpovídá vlastnosti (4).

Do roviny P_2 jsme umístili rovnostranný trojúhelník, jehož fourierovský obraz jsou tři čáry kolmé k hraném trojúhleníka. Zakrytím jejich průsečíku a blízkého okolí zůstaly v rovině P_4 z trojúhelníku viditelné pouze hrany.

Do roviny P_2 jsme umístili obraz českého lva v kleci ze svislé mříže. V jeho fourierovském obrazu je patrná horizontální řada bodů odpovídající právě mříži. Odfiltrováním všech kromě prostředního jsme na výstupu z procesoru dostali mírně rozmazaného lva osvobozeného z klece.

Diskuse výsledků

Rozměry zkoumaných objektů zjištěné fourierovsky a mikroskopem se shodují v rámci přesnosti uvedené na začátku Výsleků měření. Fourierovská metoda by mohla být výrazně přesnější, pokud bychom měli ke stínítku P_4 dobrý přístup, abychom mohli vzdálenosti dobře odečítat, a výsledky zpracovali statisticky. S použitým rozestavením by ani statistika nepomohla, protože jsme stupnici pravítka pozorovali z příliš velké vzdálenosti.

Odfiltrováním středu ze spektra trojúhleníku jsme odstranili nízké prostorové frekvence odpovídající právě vnitřku. Hrany, tedy ostré přechody, odpovídají vysokým prostorovým frekvencím, o nichž se informace zachovala. Proto byl výstupem obrys trojúhelníku.

Odfiltrováním všech vyšších frekvencí na horizontální čáře jsme se zbavili prakticky celé mříže, po které zbyly nanejvýš silně rozmazané (a tedy nezřetelné) vnitřky. Celá plocha lva je naopak nízkofrekvenční, a proto zůstala. Ostré kontury lva rovnoběžné s mříží jsme ovšem tímto ztratili.

Závěr

Ověřili jsme fungování improvizovaného teleskopu z čoček $\check{C}_1$ a $\check{C}_2$. Jeho zvětšení jsme určili jako 6násobné. Zvětšení Fourierova obrazu v rovině P_4 je 10.6násobné, zvětšení obrazu v rovině P_3 1.2násobné.

Proměřením fourierovských spekter obdélníku (a, b), rovnoběžných pruhů (l) a mříže (m) jsme získali jejich rozměry

$$a = 2.6\,\mathrm{mm}, \qquad b = 2.2\,\mathrm{mm}$$
$$l = 107\,\mu\mathrm{m}, \qquad m = 96\,\mu\mathrm{m}$$

které v rámci přesnosti měření odpovídají přesnějším hodnotám zjištěným mikroskopem.

Ověřili jsme vlasnosti (3) a (4) Fourierovy transformace. Osvobodili jsme lva z klece.

Reference

[1] *Studijní texty Praktika III* [online]. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`.