

Pracovní úkol

1. Proměřte rotační disperzi křemene.
Pro každou vlnovou délku proveďte 5 měření stočení polarizační roviny a proveďte odhad střední hodnoty a rozptylu. Zprůměrované hodnoty s vypočítanou chybou pak vynesete do grafu v závislosti na vlnové délce.
2. Změřte Verdetovu konstantu benzenu.
Vynesete do grafu závislost úhlu stočení polarizační roviny lineárně polarizovaného světla na magnetické indukci. Pro každou hodnotu magnetické indukce vypočítejte Verdetovu konstantu. Z těchto dat vypočtete střední hodnotu Verdetovy konstanty a její standardní odchylku.

Teoretický úvod

Křemen je krystalická látka, jejíž prostorová grupa symetrie obsahuje šroubovou osu. Podél ní se potom může šířit jen kruhově polarizované světlo. Pokud ve směru osy dopadne na křemen lineárně polarizované světlo, rozloží se na levotočivě a pravotočivě polarizované svazky, které se ovšem šíří krystalem s různou rychlostí. Výsledkem toho je vznik fázového rozdílu mezi oběma svazky, který po jejich složení na lineárně polarizované světlo za krystalem způsobí de facto stočení polarizační roviny. Pro úhel stočení α lze podle [1] odvodit vztah

$$\alpha = \frac{\pi(n_l - n_p)}{\lambda}d = \rho d, \quad (1)$$

kde n_l , n_p jsou po řadě indexy lomu pro levotočivý a pravotočivý svazek, λ je vlnová délka světla, d je délka dráhy světla v krystalu a ρ je tzv. *měrná optická stáčívost*.

Benzen je za normálního stavu opticky neaktivní, po vložení do magnetického pole ale získá optickou aktivitu. Při vstupu lineárně polarizovaného světla ve směru pole dojde opět k jeho rozložení na levotočivý a pravotočivý svazek a vše probíhá dále jako v případě výše. Pro výsledný úhel stočení polarizační roviny α platí podle [1]

$$\alpha = VBd, \quad (2)$$

kde V je tzv. *Verdetova konstanta*, B je intenzita magnetického pole a d je délka dráhy světla v kapalině.

Pro pole uvnitř reálného solenoidu ve vzdálenosti a od jeho středu platí s dobrou přesností vztah

$$B(a) = \frac{\mu NI(D_+ + D_-)}{2l(r_2 - r_1)}, \quad (3)$$
$$D_{\pm} = \left(\frac{l}{2} \pm a\right) \ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{1}{2}l \pm a\right)^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{2}l \pm a\right)^2}},$$

λ/nm	α	
	0.405 mm	1.595 mm
405	$(18.43 \pm 0.28)^\circ$	$(72.38 \pm 0.49)^\circ$
436	$(16.47 \pm 0.12)^\circ$	$(64.67 \pm 0.13)^\circ$
491	$(11.56 \pm 0.55)^\circ$	$(47.67 \pm 0.57)^\circ$
546	$(10.03 \pm 0.08)^\circ$	$(39.60 \pm 0.11)^\circ$
578	$(9.08 \pm 0.06)^\circ$	$(35.18 \pm 0.06)^\circ$

Tabulka 1: Měření stáčivosti křemene

kde N je počet závitů, I je proud, l je délka solenoidu a r_1 , r_2 po řadě vnitřní a vnější poloměr. Pro výpočet Verdetovy konstanty z (2) je ovšem třeba vzít střední hodnotu pole podle vztahu

$$\langle B \rangle = \frac{1}{k} \int_{-k/2}^{k/2} B(a) da, \quad (4)$$

kde k je délka kyvety, ve které je zkoumaná kapalina.

Statistické zpracování

Hodnotu veličiny změřené opakovaně uvádíme jako $\bar{x} \pm \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \delta^2}$, kde

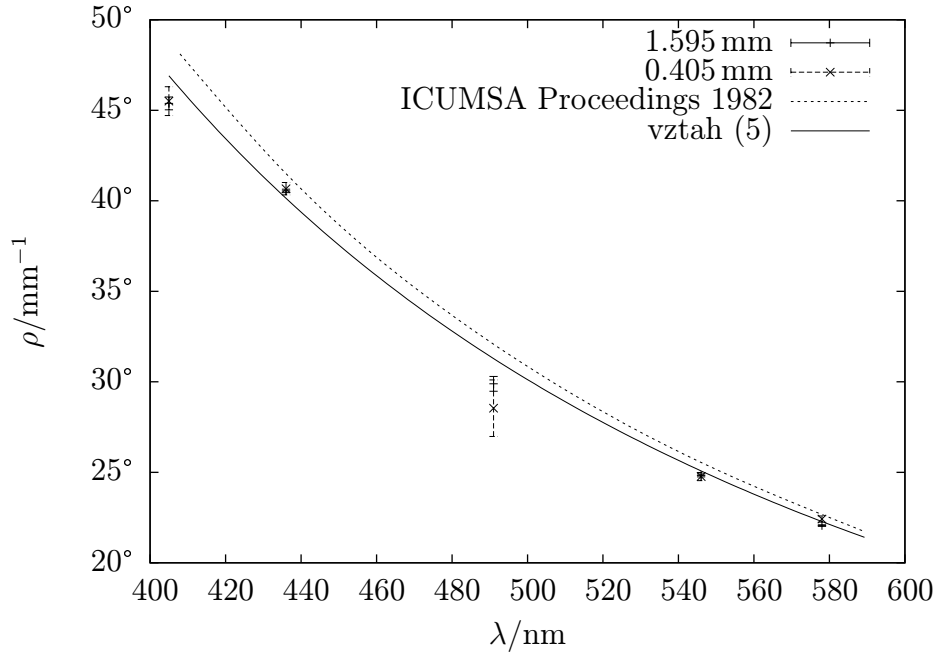
$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

a δ je chyba měřidla.

Při fitování vztahu na naměřená data používáme program *Gnuplot*. Ten aplikuje metodu nejmenších čtverců. V případě lineárního fitování jsou parametry dopočítány algebraicky, v případě nelineárního iterativně. Chyby parametrů fitování mají stejné vlastnosti jako standardní směrodatné odchylky. Vypočítané parametry ovšem nemusí být nezávislé veličiny, je proto nutné s nimi dále pracovat pomocí korelační matice, kterou *Gnuplot* pro každý fit poskytuje.

Výsledky měření

Stáčení polarizační roviny křemenem jsme měřili pomocí rtuťové výbojky, sady filtrů vybírající vždy jen čáru určité vlnové délky, polarizátoru, krystalů křemene o délkách 0.405 mm a 1.595 mm, analyzátoru a dalekohledu. Celá aparatura byla uzpůsobena pro polostínovou metodu. Každou vlnovou délku a každý krystal jsme měřili vždy pětkrát. Úhel stočení jsme dostali odečtením úhlové pozice analyzátoru s vřazeným krystalem a bez vřazeného krystalu. Měrnou stáčivost jsme potom získali ze vztahu (1). Výsledky jsou v Tabulce 1 a na Obrázku 1.



Obrázek 1: Závislost měrné stáčivosti křemene na vlnové délce

Jeden z empirických vztahů pro závislost indexu lomu na vlnové délce je

$$n = A + \frac{B}{\lambda + C}.$$

Protože dosazením tohoto vztahu do (1) bychom dostali šest konstant, zatímco máme jen pět bodů k proložení, použili jsme uvedený vztah pro celý rozdíl $n_l - n_p$. Ani potom regrese nechtěla zkonvergovat, proto jsme položili $A = 1$. Výsledný vztah, na který jsme s dobrým výsledkem fitovali naměřenou závislost $\rho(\lambda)$ je tak

$$\rho = \frac{180^\circ \times \left(1 + \frac{B}{\lambda + C}\right)}{\lambda}. \quad (5)$$

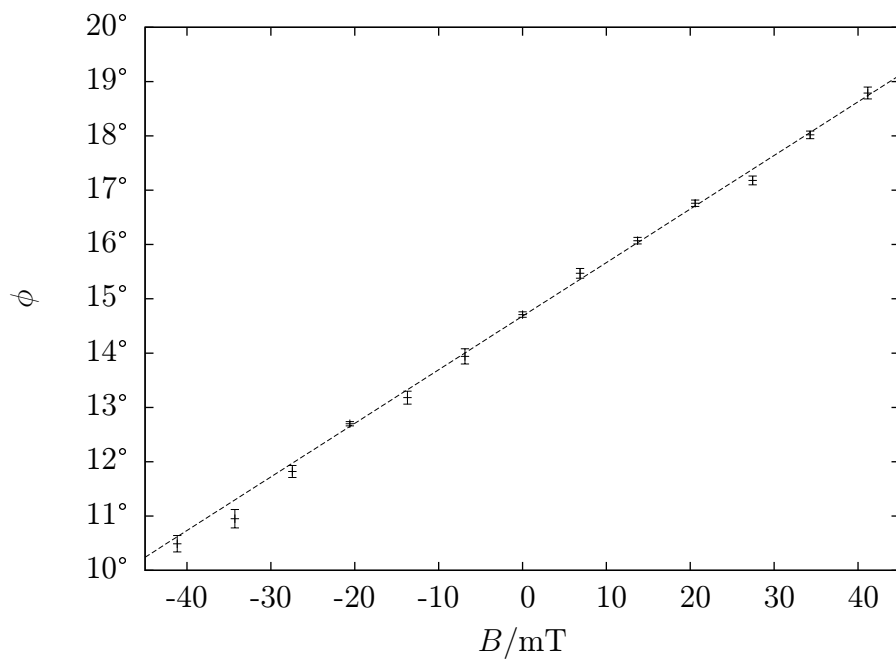
Konečně jsou v grafu vynesena ještě proložená data z [2].

Pro měření Verdetovy konstanty jsme použili podobnou aparaturu. Jako zdroj světla sodíkovou výbojku, dále polarizátor, kyvetu s benzenem o délce 20 cm usazenou uprostřed solenoidu o parametrech $N = 3045$, $l = 25$ cm, $r_1 = 30$ mm, $r_2 = 56$ mm ve smyslu vztahu (3), analyzátor a dalekohled. Solenoid jsme napájeli stejnosměrným napětím, odečítali jsme proud a z něj pomocí (3), (4) dopočítali pole působící na benzen. Pozici analyzátoru jsme odečetli vždy třikrát. Výsledky jsou v Tabulce 2 a na Obrázku 2. Proložením přímkové závislosti a dělením konstanty úměrnosti délkou kyvety potom dostaneme Verdetovu konstantu. Výsledek je

$$V = (8.6 \pm 0.1) \text{ rad} \times \text{T}^{-1} \times \text{m}^{-1}.$$

I/A	$\langle B \rangle/\text{mT}$	φ
-3.00	-41.16	$(10.49 \pm 0.15)^\circ$
-2.50	-34.30	$(10.95 \pm 0.17)^\circ$
-2.00	-27.44	$(11.82 \pm 0.11)^\circ$
-1.50	-20.58	$(12.70 \pm 0.04)^\circ$
-1.00	-13.72	$(13.18 \pm 0.12)^\circ$
-0.50	-6.86	$(13.94 \pm 0.14)^\circ$
0.00	0.00	$(14.71 \pm 0.05)^\circ$
0.50	6.86	$(15.47 \pm 0.09)^\circ$
1.00	13.72	$(16.07 \pm 0.06)^\circ$
1.50	20.58	$(16.76 \pm 0.06)^\circ$
2.00	27.44	$(17.18 \pm 0.08)^\circ$
2.50	34.30	$(18.02 \pm 0.07)^\circ$
3.00	41.16	$(18.79 \pm 0.11)^\circ$

Tabulka 2: Měření Verdetovy konstanty pro benzen



Obrázek 2: Závislost stočení polarizační roviny na působícím poli

Diskuse výsledků

Závislost optické stáčivosti křemenu na vlnové délce vyšla zhruba stejně jako tabelované hodnoty. Hodnoty pro oba krystaly se shodují. Mírně nižší hodnoty oproti tabelovaným můžou být způsobeny např. nečistotami v krystalu, případně prostě statistikou, chybové úsečky jsou na to velké dost. Vzhledem k téměř identickému průběhu křivky je ale pravděpodobnější systematická chyba. Samotná metoda je svojí diferenční povahou odolná vůči různým systematickým chybám, na které bychom mohli přijít.

U proměrování Verdetovy konstanty se ukázalo být podstatné změřit každé pole několikrát. Rozptyl hodnot je skutečně velký. Pro jiné statistické zpracování, než které je uvedené v zadání, jsme se rozhodli právě kvůli více hodnotám, které jsme měli k dispozici. Lineární regrese je navíc metodou nejstabilnější vůči různým numerickým náhodám. Bohužel se mi nepodařilo dohledat žádnou hodnotu Verdetovy konstanty pro benzen k porovnání.

Závěr

Naměřili jsme rotační disperzi, tj. závislost optické stáčivosti na vlnové délce, křemenu. Výsledná závislost je na Obrázku 1.

Určili jsme Verdetovu konstantu benzenu při vlnové délce sodíkové čáry, tj. 589.3 nm. Naše experimentální hodnota je

$$V = (8.6 \pm 0.1) \text{ rad} \times \text{T}^{-1} \times \text{m}^{-1}.$$

Reference

- [1] *Studijní texty Praktika III* [online]. <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>.
- [2] *Proceedings of the 18th Session of ICUMSA*. 1982