

Obrázek 1: Schéma zapojení obvodu

Pracovní úkol

1. Sestavte obvod podle Obrázku 1 a změřte pro obvod v periodickém stavu závislost doby kmitu T na velikosti zařazené kapacity. ($C = 0.1; 0.3; 0.5; 1; 3; 5 \mu\text{F}$, $R = 20 \Omega$). Výsledky měření zpracujte graficky a vyhodnoťte velikost indukčnosti L zařazené v obvodu.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačních odporů pro čtyři hodnoty kapacit zařazeného kondenzátoru ($0.5; 1; 2; 5 \mu\text{F}$). I v tomto případě stanovte velikost indukčnosti L .
3. Změřte závislost relaxační doby obvodu RC na velikosti odporu nebo kapacity v obvodu. Výsledky měření zpracujte graficky a porovnejte s teoretickými.

Teoretický úvod

Při zapojení obvodu v poloze (1) je po ustanovení rovnováhy na kondenzátoru napětí ε a obvodem neprotéká proud. Při přepnutí do polohy (2) vznikne tzv. sériový RLC obvod. Kondenzátor se v něm vybíjí skrze rezistor a cívka způsobuje, že proud v obvodu je střídavý s konstantní frekvencí. Zcela je toto chování popsáno lineární rovnicí druhého řádu. V [1] je odvozeno, že perioda kmitů v RLC obvodu je

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (1)$$

Při zvyšování odporu R v obvodu jsou kmity stále tlumenější, tj. amplituda klesá s časem stále rychleji, až při jisté hodnotě odporu proud v obvodu už ani jednou nestihne změnit směr. Pro tento tzv. *aperiodizační* odpor je odvozeno

$$R_{\text{ap}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2)$$

Pokud z obvodu odstraníme cívku, dostaneme sériový RC obvod. V něm se kondenzátor opět vybíjí přes rezistor, ale tentokrát je proud vždy stejnosměrný. Závislost proudu na čase t je úměrná $\exp(-t/\tau)$, kde τ se nazývá *relaxační doba*. Pro tu je odvozen teoretický vztah

$$\tau = RC. \quad (3)$$

Statistické zpracování

Hodnotu veličiny změřené opakovaně uvádíme jako $\bar{x} \pm \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \delta^2}$, kde

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

a δ je chyba měřidla.

Při fitování vztahu na naměřená data používáme program *Gnuplot*. Ten aplikuje metodu nejmenších čtverců. V případě lineárního fitování jsou parametry dopočítány algebraicky, v případě nelineárního iterativně. Chyby parametrů fitování mají stejné vlastnosti jako standardní směrodatné odchylky.

Výsledky měření

Pro měření jsme použili systém ISES, který byl zapojený stejně jako oscilátor na Obrázku 1. Tento systém nám umožnil zobrazit časovou závislost napětí na rezistoru bezprostředně po přepnutí obvodu do polohy (2). V tomto zobrazení potom umožňuje zjistit periodu kmitů, případně koeficient v exponenciále v třetí části úlohy.

Teplota v místnosti byla po čas experimentu $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$. Do obvodu jsme použili cívku s neznámou indukčností, jako kondenzátor sloužila kapacitní dekáda s předpokládanou přesností 5% a jako rezistor jsme použili odporovou dekádu s přesností $0.5\% + 5 \text{ m}\Omega$. Napětí zdroje bylo asi $\varepsilon = 4.5 \text{ V}$.

Nejprve jsme změřili periodu kmitů pro několik kapacit při $R = 20 \Omega$. Každé měření jsme provedli 4–6krát. Chybu měřidla jsme uvažovali jako polovinu poslední platné číslice. Výsledky shrnuje Tabulka 1 a Obrázek 2. Fitováním (1) na data jsme obdrželi

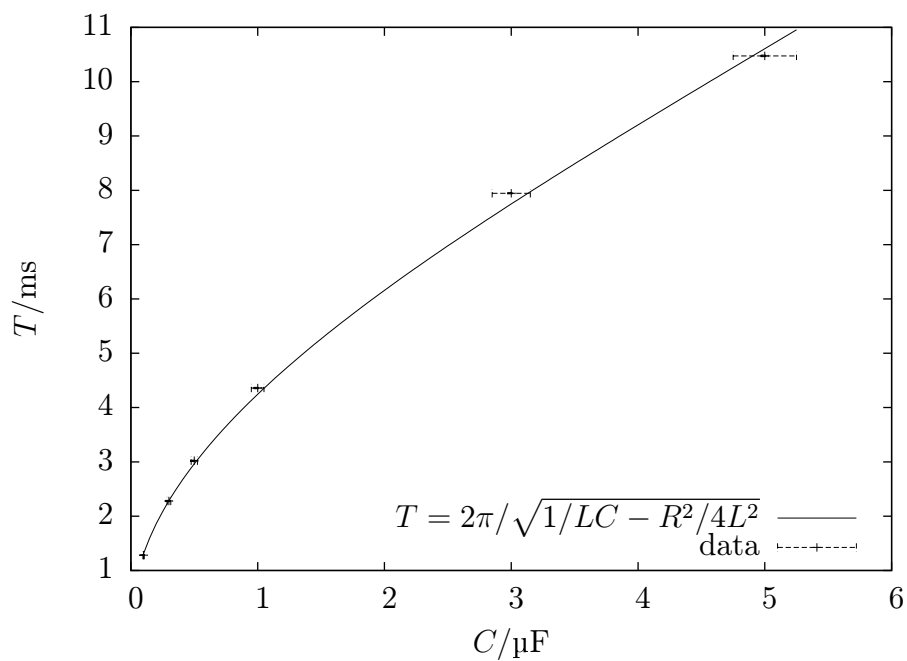
$$L = (490 \pm 30) \text{ mH}, \quad R = (290 \pm 20) \Omega.$$

Vidíme, že v obvodu máme kromě rezistoru ještě nějaký jiný odpor.

Dále jsme měřili hodnoty aperiodizačních odporů. Pro danou kapacitu jsme vždy zvyšovali hodnotu odporu, až jsme při přepojení obvodu do polohy (1) nepozorovali žádné překmitnutí proudu. V měřícím systému byl přítomný šum, který toto znemožňoval dobře rozeznat. Tuto nepřesnost jsme odhadli na 20Ω v

$C/\mu\text{F}$	T/ms
0.1	1.283 ± 0.002
0.3	2.280 ± 0.010
0.5	3.020 ± 0.010
1	4.360 ± 0.013
3	7.945 ± 0.011
5	10.475 ± 0.014

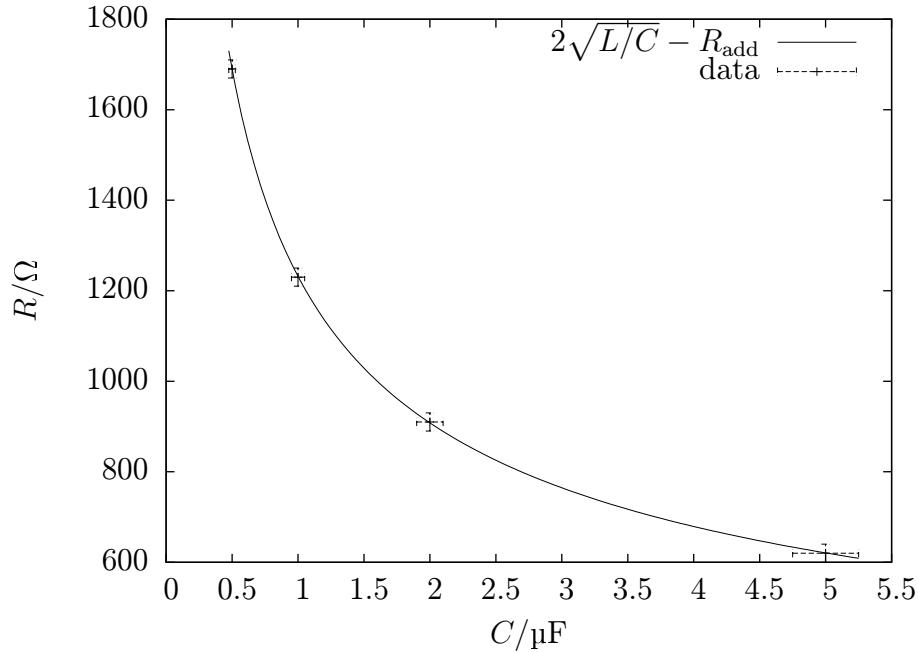
Tabulka 1: Periody kmitů pro různé kapacity



Obrázek 2: Závislost periody kmitů na kapacitě

$C/\mu\text{F}$	R/Ω
0.5	1690 ± 20
1	1230 ± 20
2	910 ± 20
5	620 ± 20

Tabulka 2: Aperiodizační odpory pro různé kapacity



Obrázek 3: Závislost aperiodizačního odporu na kapacitě

určení aperiodizačního odporu. Protože z předchozího měření plyne, že v obvodu máme ještě nějaký další odpor R_{add} kromě rezistoru, musíme tento ze vztahu (2) odečíst, čímž dostaneme

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_{\text{add}}. \quad (4)$$

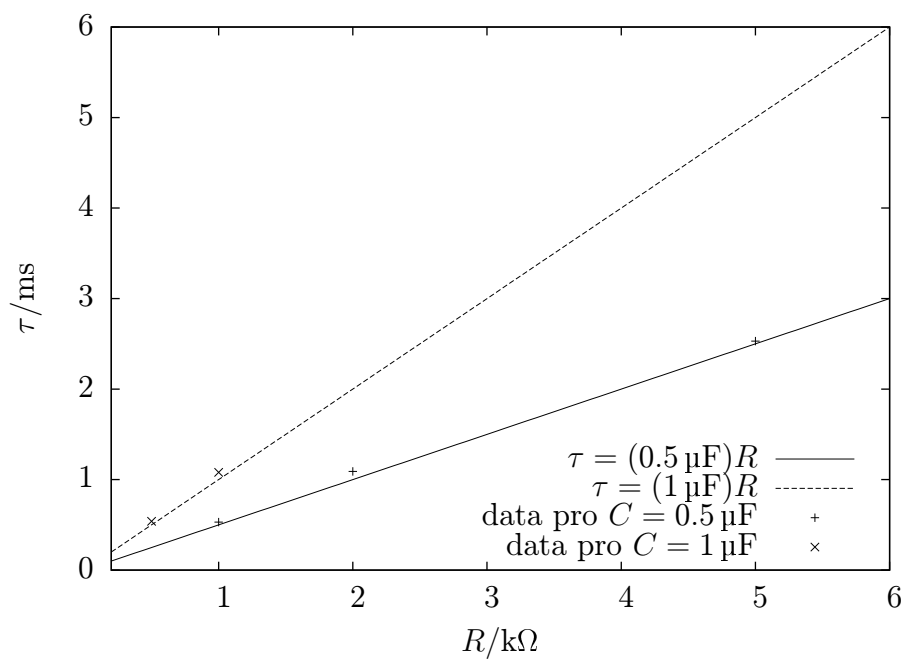
Výsledky shrnuje Tabulka 2 a Obrázek 3. Fitováním (4) na data jsme dostali

$$L = (305 \pm 2) \text{ mH}, \quad R_{\text{add}} = (-126 \pm 3) \Omega.$$

Nakonec jsme změřili relaxační dobu pro několik dvojic (R, C) . Relaxační dobu jsme získali jako převrácenou hodnotu koeficientu b ze závislosti $\exp(-bt)$, kterou jsme fitovali průběh napětí přímo v systému ISES. Chybu určení koeficientu systém neuvádí, ale odhadujeme, že by neměla být větší než je uvedený počet platných číslic. Výsledky shrnuje Tabulka 3 a část z nich Obrázek 4.

$R/\text{k}\Omega$	0.5	1	2	5
$C/\mu\text{F}$	τ/ms			
0.5		0.53	1.09	2.53
1	0.54	1.08		
2	1.09			
5	2.54			

Tabulka 3: Relaxační doby



Obrázek 4: Závislost relaxační doby na kapacitě a odporu

Diskuse výsledků

Při měření periody kmitů jsme zjistili, že v obvodu se kromě odporu rezistoru nachází ještě dalších $270\ \Omega$. Protože kondenzátory jsou velmi blízko ideálním kapacitám, nejpravděpodobněji připadá tento odpor na cívku, tj. je to její náhradní sériový odpor. Členy ve vztahu (1) jsou tak

$$\frac{1}{LC} \simeq 10^5 \dots 10^7, \quad \frac{R^2}{4L^2} \simeq 10^5$$

a zanedbáním druhého z nich bychom se dopustili systematické chyby, zvláště pro vyšší kapacity. Fitovaný vztah spadá do chybových úseček dat, takže zjištěné parametry mají dobrý smysl.

Z měření aperiodizačních odporů jsme jako v minulém případě dostali hodnoty indukčnosti a odporu. Odpor zde ale vyšel záporný, což ukazuje na zcela špatný model nebo špatně naměřená data. Ani indukčnost se vůbec neshoduje s předchozím výsledkem. Možným a pravděpodobným vysvětlením je zde chybný postup při určování aperiodizačního odporu. Pásmo odporů, ve kterém šum znemožnil rozlišení periodického a aperiodického průběhu, bylo zřejmě mnohem širší a my jsme určili jen jeho dolní hranici. Správný postup by tedy byl určit ještě horní hranici, kdy už začne být zřetelný periodický průběh a potom vzít průměr těchto dvou hodnot.¹ Tak bychom dostali větší hodnoty aperiodizačních odporů, tedy větší indukčnost, což odpovídá předchozímu výsledku. Spravit by se měla i celková závislost, tedy zjištěný odpor. Fakt, že výsledná křivka velmi dobře odpovídá experimentálním bodům je náhoda. Parametr R_{add} zde kompenzuje systematickou chybu z měření. Hodnoty získané z této části úlohy tak mají pramalou výpovědní hodnotu.

Naměřené relaxační doby sériového RC obvodu v zásadě odpovídají teoretickému součinu RC . V tomto součinu se hlavní měrou projevuje nepřesnost kapacitní dekády, tedy relativně 5%, navíc jen předpokládaných. Také přesně neznáme chybu určení relaxačních dob, což znemožňuje relevantní diskuzi.

Závěr

Změřili jsme závislost doby kmitu v sériovém RLC obvodu na zařazené kapacitě. Výsledky jsou v Tabulce 1 a Obrázku 2. Z naměřených dat jsme určili indukčnost a náhradní sériový odpor cívky

$$L = (490 \pm 30)\ \text{mH}, \quad R_L = (270 \pm 20)\ \Omega.$$

Změřili jsme závislost aperiodizačních odporů na kapacitě. Výsledky jsou v Tabulce 2 a Obrázku 3. Data jsou ale pravděpodobně znehodnocena systematickou chybou, způsobenou šumem v zařízení a žádným přizpůsobením měření

¹Ani tento postup není zcela korektní, protože nás nic neopravňuje myslet si, že pásmo je symetrické kolem aperiodizačního odporu.

tomuto faktu. Indukčnost $L = 300$ mH určená z naměřených dat má tak spíše řádovou výpovědní hodnotu.

Určili jsme relaxační doby sériového RC obvodu při různých kombinacích kapacit a odporů. Výsledky jsou v Tabulce 3 a Obrázku 4. Data odpovídají teoretickému součinu RC v rámci chyby měření.

Reference

- [1] Bakule, R. – Šternberk, J. *Fyzikální praktikum II. Elektřina a magnetismus*. Státní pedagogické nakladatelství. Praha.