

Pracovní úkol

1. Změřte indukčnosti L_A , L_B a vlastní kapacity C_A , C_B cívek A a B .
2. Určete vzájemnou indukčnost M cívek A a B umístěných ve svorkách 1, 2 a 3, 4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti několikrát opakujte a stanovte chybu měření.
4. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
5. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.

Teoretický úvod

Při rezonanci v RLC obvodu podle [1] platí

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

kde ω_r je rezonanční úhlová frekvence, L je indukčnost obvodu a C jeho kapacita. Marginální příspěvek ke kapacitě tvoří samotný kondenzátor a cívka. Z náhradního obvodu cívky je potom zřejmé, že kapacita cívky a kondenzátoru jsou vůči sobě v sériovém obvodu paralelně, tedy $C = C_N + C_L$. Z toho dosazením a úpravou

$$\frac{1}{\omega_r^2} = L(C_N + C_L), \quad (1)$$

což je lineární závislost $\omega_r^{-2} = f_r^{-2}/4\pi^2$ na C_N a regresí z ní můžeme získat L a C_L .

Celková indukčnost obou cívek A , B zapojených v sérii je

$$L_{\pm} = L_A + L_B \pm 2M,$$

kde M je vzájemná indukčnost a znaménko ve vztahu závisí na vzájemné orientaci vinutí. Z toho

$$M = \frac{L_+ - L_-}{4}. \quad (2)$$

Redukovanou rezonanční křivkou nazýváme v případě sériového obvodu závislost $I/I_r = y$ na $\omega/\omega_r = f/f_r = x$, kde I je proud v obvodu, f frekvence a I_r , f_r jejich rezonanční hodnoty. Teoretická závislost je podle [1]

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}, \quad (3)$$

kde

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4)$$

se nazývá míra útlumu a je rovna pološířce křivky vynesené na kvadratickou vertikální osu a R je náhradní sériový obvod. Dále se definuje činitel jakosti

$$Q = \frac{1}{d}. \quad (5)$$

Pokud s kondenzátorem $C_N = C_1$ nastavíme rezonanci obvodu, potom na něj paralelně zapojíme neznámou kapacitu C_x a změnou $C_N = C_2$ opět docílíme rezonance při stejné frekvenci, musí být zřejmě $C_1 = C_2 + C_x$ a tedy

$$C_x = C_1 - C_2. \quad (6)$$

Statistické zpracování

Chybu veličiny $u = f(x_i^{n_i})$ počítáme ze vztahu

$$\delta_u = u \sum_i n_i \frac{\delta_{x_i}}{x_i},$$

kde x_i jsou nezávislé veličiny, n_i jejich mocniny a δ_{x_i} jejich chyby.

Při fitování vztahu na naměřená data používáme program *Gnuplot*. Ten aplikuje metodu nejmenších čtverců. V případě lineárního fitování jsou parametry dopočítány v jednom kroku algebraicky, v případě nelineárního se hledají pomocí iterativní minimalizace. Chyby parametrů fitu jsou počítány způsobem který je ekvivalentní výpočtu standardní směrodatné odchylky, a proto s nimi budeme zacházet právě tak.

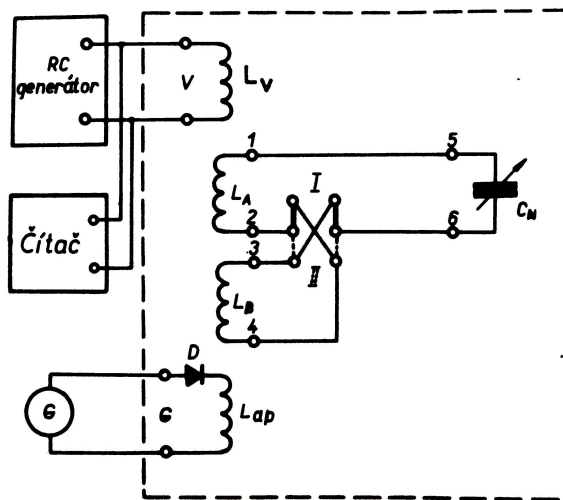
Tam, kde to je užitečné, uvádíme hodnotu

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - y(x_i))^2}{y(x_i)},$$

kde n je počet dat, p počet fitovaných parametrů, y_i naměřená hodnota a $y(x_i)$ hodnota očekávaná z nafilovaného vztahu. Pro data, která podléhají normálnímu rozložení, je očekávaná hodnota χ^2 rovna 1. Vyšší hodnota ukazuje na nadceněnou přesnost dat, systematickou chybu nebo špatný model. Nižší hodnota na podceněnou přesnost dat.

Výsledky měření

K měření jsme použili obvod na Obrázku 1. Galvanometr v obvodu G je na cívku napojen sériově přes diodu s kvadratickou charakteristikou. Výchylka na galvanometru je tak úměrná kvadrátu proudu protékajícího hlavním obvodem.



Obrázek 1: Schéma zapojení

C_N/pF	f_r/kHz			
	A	B	+	-
350.0		539.0		
400.0	507.9	507.2	320.1	415.8
450.0	483.0	480.3	303.1	393.8
500.0	461.4	457.4	288.6	374.9
550.0	442.5	436.5	276.0	358.5
600.0	429.2	419.0	264.9	344.0
650.0	410.6		254.9	331.8
700.0	397.3		246.1	319.7

Tabulka 1: Závislosti $f_r(C_N)$ pro různá zapojení

Při určování rezonanční frekvence jsme vždy zjistili frekvence při stejné výchylce na obou stranách rezonanční křivky a rezonanční frekvenci pak určili jako jejich průměr. Naměřené závislosti $f_r(C_N)$ shrnuje Tabulka 1. Kurzívou jsou psána data, která byla vynechána při zpracování kvůli odlehlosti. Chyba f_r je vzhledem ke zpracování regresí nepodstatná, chybu C_N odhadujeme vzhledem k velikosti nejmenšího dílku na stupnici kondenzátoru na ± 0.1 pF a je tedy dobře zanedbatelná. Výsledky regrese podle (1) shrnuje Tabulka 2. Z (2) potom

$$M = (58.1 \pm 0.2) \mu\text{H}.$$

Rezonanční křivku jsme proměřovali při zapojení +, tedy souhlasném zapojení cívek, a kapacitě $C_N = (650.0 \pm 0.1)$ pF. Chybu výchylky na galvanometru odhadujeme na ± 1 dílek, chybu frekvence ± 0.3 kHz. Maximální výchylka na galvanometru byla $N_r = (50 \pm 1)$ dílků, rezonanční frekvenci jsme určili způsobem popsaným výše jako $f_r = (254.9 \pm 0.3)$ kHz. Výsledky shrnuje Tabulka 3.

	<i>A</i>	<i>B</i>	+	-
<i>L</i> /μH	207.8 ± 0.2	228.9 ± 0.6	570.1 ± 0.5	337.8 ± 0.2
<i>C_L</i> /pF	72.5 ± 0.7	30.5 ± 1.4	33.5 ± 0.6	33.6 ± 0.3

Tabulka 2: Výsledky regrese na vztah (1)

<i>N</i>	<i>f</i> /kHz		<i>y</i> ²	<i>x</i>	
5	246.6	262.7	0.10	0.9682	1.0314
10	249.4	259.8	0.20	0.9792	1.0200
15	250.6	258.6	0.30	0.9839	1.0153
20	251.2	258.1	0.40	0.9863	1.0133
25	251.6	257.7	0.50	0.9878	1.0118
30	252.1	257.2	0.60	0.9898	1.0098
35	252.5	256.8	0.70	0.9914	1.0082
40	253.1	256.3	0.80	0.9937	1.0063
45	253.7	255.7	0.90	0.9961	1.0039
50	254.7		1.00	1.0000	

Tabulka 3: Závislost výchylky galvanometru na frekvenci

Naměřená data jsme fitovali na vztah (3) s výsledkem

$$d = (2.31 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}.$$

Data proložená nafitovanou křivkou jsou na Obrázku 2. Z rovnice (5) tak

$$Q = 43.3 \pm 0.9$$

a dále dosazením d , $C = C_N + C_+$ a $L = L_+$ do (4)

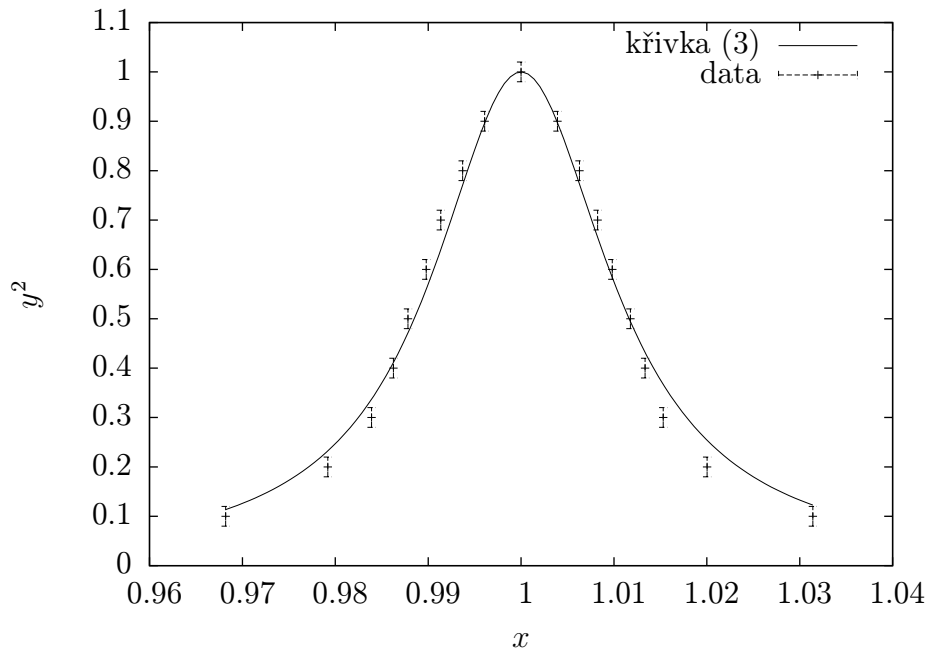
$$R = (21.1 \pm 0.5) \Omega.$$

Otočný kondenzátor jsme kalibrovali metodou popsanou v Teoretickém úvodu. Nastavili jsme $C_1 = (1000.0 \pm 0.1)$ pF a mohli jsme tak po nastavení rezonance změnou na C_2 až na odečítání od tisíce rovnou odečítat kapacitu otočného kondenzátoru. Chybu určení kapacity odhadujeme na ± 1 pF. Kalibraci shrnuje Tabulka 4 a Obrázek 3.

Diskuse výsledků

Díky regresi jsou chyby určení indukčností a kapacit cívek velmi malé. Je $C_+ = C_-$ v rámci chyby měření, což odpovídá očekávání. Dále $1/C_A + 1/C_B \neq 1/C_+$ a tedy vidíme, že kapacitu sériově zapojených cívek nemůžeme vypočítat jako kapacitu sériově zapojených kondenzátorů, což je ovšem zřejmé.

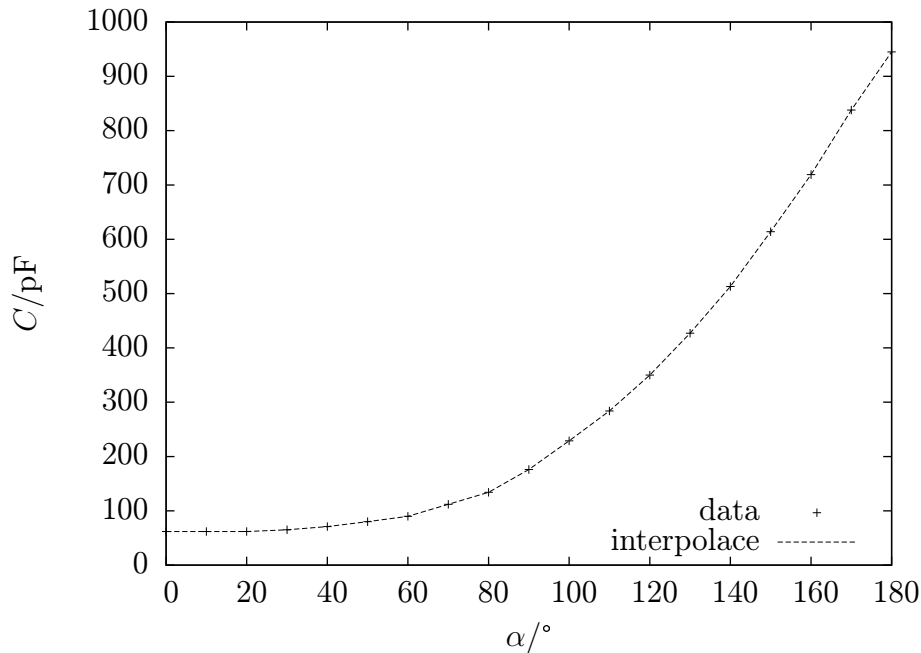
Naměřená rezonanční křivka přibližně odpovídá teoretické, fitování skončilo s $\chi^2 = 3$. To může být způsobeno menším odhadem chyby výchylky, ale vzhledem



Obrázek 2: Redukovaná rezonanční křivka

$\alpha/^\circ$	C/pF	$\alpha/^\circ$	C/pF
0	62	100	229
10	62	110	284
20	62	120	350
30	65	130	427
40	71	140	513
50	80	150	614
60	90	160	719
70	112	170	838
80	134	180	945
90	176		

Tabulka 4: Kalibrace otočného kondenzátoru



Obrázek 3: Kalibrační křivka otočného kondenzátoru

k pravidelné odlehlosti bodů od teoretické křivky spíše systematickou chybou. Nejpravděpodobnější vysvětlení je nepřesná kvadratická charakteristika usměrňující diody.

Kapacita otočného kondenzátoru na úhlu otočení na začátku rozsahu téměř nezávisí, na konci rozsahu potom závisí přibližně lineárně. Tato funkční závislost je velmi netriviálně určena tvarem ploch, které se do sebe při otáčení zasouvají.

Závěr

Naměřili jsme indukčnosti cívek $L_A = (207.8 \pm 0.2) \mu\text{H}$, $L_B = (228.9 \pm 0.6) \mu\text{H}$ a jejich vlastní kapacity $C_A = (72.5 \pm 0.7) \text{pF}$, $C_B = (30.5 \pm 1.4) \text{pF}$. Dále jsme změřili jejich vzájemnou indukčnost $M = (58.1 \pm 0.2) \mu\text{H}$.

Pro zapojení + a $C_N = 650 \text{pF}$ jsme naměřili kalibrační křivku na Obrázku 2 a z tohoto měření určili hodnoty míry útlumu $d = (2.31 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}$, činitele jakosti $Q = 43.3 \pm 0.9$ a náhradního sériového odporu obvodu $R = (21.1 \pm 0.5) \Omega$.

Provedli jsme kalibraci otočného kondenzátoru. Kalibrační křivka je vynesena na Obrázku 3.

Reference

- [1] Bakule, R. – Šternberk, J. *Fyzikální praktikum II. Elektřina a magnetismus*. Státní pedagogické nakladatelství. Praha.