

## Pracovní úkol

1. Změřte metodou přímou závislost odporu vlákna žárovky na proudu, který jím protéká. K měření použijte stejnosměrné napětí v rozsahu do 24 V.
2. Změřte substituční metodou vnitřní odpor měřících přístrojů použitých v úkolu 1. Výsledek použijte k případné korekci naměřených hodnot odporů v úkolu 1.
3. Metodou substituční změřte závislost odporu vlákna žárovky na proudu od nejmenších proudů (0.2 mA) až do 25 mA. Porovnejte přesnost výsledků s přesností dosaženou v úkolu 1.
4. Výsledky zpracujte graficky a diskutujte vliv měřících přístrojů.
5. Stanovte odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě. K extrapolaci odporu vlákna na pokojovou teplotu použijte graf závislosti odporu vlákna na příkonu žárovky (do grafu vyznačte chybu měření).

## Teoretický úvod

Pro změřeni odporu libovolné součástky můžeme s úspěchem využít stejnosměrný proud a Ohmův zákon

$$R = \frac{U}{I}, \quad (1)$$

kde  $R$  je hledaný odpor součástky,  $U$  napětí na ní a  $I$  proud jí procházející. K tomu potřebujeme změřit zároveň proud i napětí, při čemž narážíme na neideálnost obou měřících přístrojů; ampérmetr nemá nulový odpor, voltmetr naopak nekončící.

Máme dvě možnosti, co se vzájemného zapojení všech tří prvků týče, obě dvě jsou na Obrázku 1.<sup>1</sup> Při zapojení (a) měříme správný proud součástkou  $R$ , ale součet napětí na součástce a ampérmetru. Z (1) tedy dostaneme společný odpor součástky a ampérmetru, a proto

$$R = \frac{U_a}{I} - R_A, \quad (2)$$

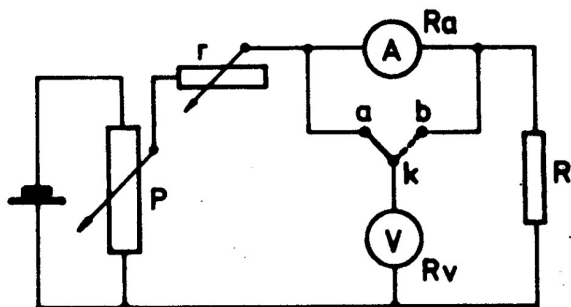
kde  $R_A$  je vnitřní odpor ampérmetru a  $U_a$  je napětí odečtené na voltmetru v tomto zapojení.

Při zapojení (b) měříme správné napětí na součástce, ale součet proudů součástkou a voltmetrem. Z (1) opět dostáváme společný odpor součástky a voltmetru, a tedy

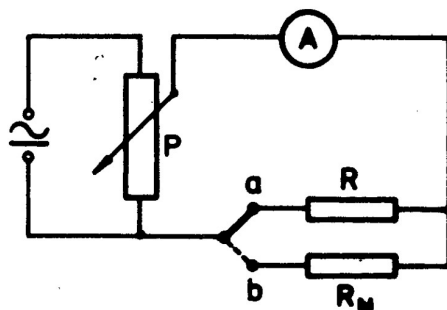
$$R = \left( \frac{I_b}{U} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \approx \frac{U}{I_b} + \frac{U^2}{I_b^2} \frac{1}{R_V}, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Narozdíl od schématu jsme použili regulovatelný zdroj napětí, takže jsme nepotřebovali potenciometr ani reostat.



Obrázek 1: Měření odporu přímou metodou [1]



Obrázek 2: Měření odporu substituční metodou [1]

kde  $R_V$  je vnitřní odpor voltmetru,  $I_b$  je proud odečtený na ampérmetru v tomto zapojení a aproximace platí dobře, pokud  $R/R_V \ll 1$ . Dále proud  $I$  protékající součástkou je zřejmě

$$I = I_b - \frac{U}{R_V}. \quad (4)$$

Jinou metodou měření odporů je metoda substituční. Ta využívá prostého faktu, že dvěma různými součástkami se stejným odporem musí při stejném napětí protékat stejný proud. Pokud tedy v zapojení<sup>2</sup> na Obrázku 2 najdeme takový odpor  $R_N$ , že ampérmetr ukazuje pro polohu (a) i (b) stejnou hodnotu, platí

$$R = R_N. \quad (5)$$

Při zpracování měření též využijeme prostého vztahu pro příkon  $P$  součástky ve stejnosměrném obvodu

$$P = RI^2. \quad (6)$$

<sup>2</sup>Oproti schématu jsme použili stejnosměrný regulovatelný zdroj napětí, tudíž jsme nepotřebovali potenciometr.

	rozsah	$R_A; R_V/\Omega$
ampérmetr	30 mA	10.3
voltmetr	1.5 V	750
	3 V	1500
	7.5 V	3760
	15 V	7500
	30 V	15000

Tabulka 1: Vnitřní odpory přístrojů

## Statistické zpracování

Chybu veličiny  $u = f(x_i)$  počítáme ze vztahu

$$\delta_u = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{x_i} \right)^2},$$

kde  $x_i$  jsou nezávislé veličiny a  $\delta_{x_i}$  jejich chyby.

## Výsledky měření

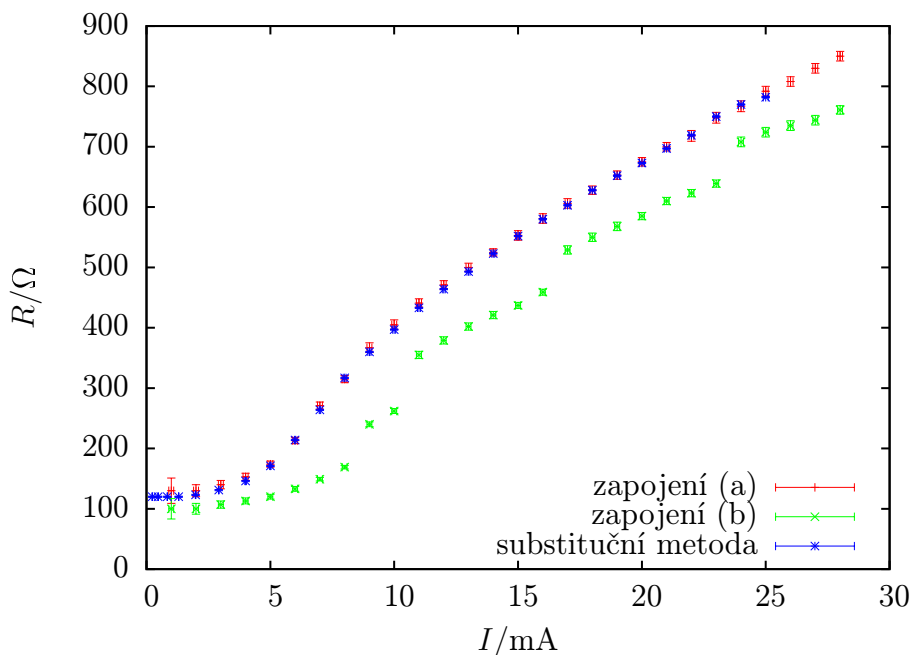
Použitý ampérmetr i voltmetr byly shodně třídy přesnosti 0.2. Chybu plynoucí z této nepřesnosti jsme dále kvadraticky sčítali s chybou odečtení ze stupnice o velikosti 0.5 dílku. Tyto dva příspěvky jsou zhruba stejně velké. Vnitřní odpory přístrojů na uvedených rozsazích zjištěných substituční metodou zobrazuje Tabulka 1. Jako referenční odpor  $R_N$  jsme používali odporovou dekádu s přesností 0.1%, nicméně přesnost dat v tabulce je na tři platné číslice, protože jemnější změny odporu nebyly patrné na ampérmetru indikujícím shodný proud.<sup>3</sup>

Výsledky měření odporu přímou metodou zachycuje Tabulka 2. Hlavní sloupec uprostřed obsahuje proud  $I_{\text{amp}}$ , na který jsme v daném kroku regulovatelným zdrojem napětí nastavili proud ampérmetrem postupně jak pro zapojení (a), tak pro zapojení (b). Pro zapojení (a) je tak tato hodnota přímo proudem  $I$  procházejícím vláknem žárovky, pro zapojení (b) je proudem  $I_b$ . Levá, resp. pravá část tabulky potom zachycuje měření zapojení (a), resp. (b) pro daný proud ampérmetrem. Hodnoty  $U_a$ , resp.  $U$  jsou odečtené z voltmetru,  $R^{(a)}$  je dopočtená podle (2),  $I$  podle (4),  $R^{(b)}$  podle (3) a  $\Delta = U^2/R_V I_b^2$  je přibližná korekce k odporu též z (3).

<sup>3</sup>Ampérmetr je změřený jen na jednom rozsahu, protože jen tento rozsah jsem použil v úkolu 1. Kolík, kterým se rozsah nastavoval, šel totiž vytáhnout jen poměrně velkou silou, a tak jsem jej z počátku považoval za nevytáhnutelný, tudíž s pevným rozsahem. Pro úkol 3, kde už jsem rozsah ampérmetru měnil, zase vnitřní odpor ampérmetru není třeba, a tak jsem jej nedoměřoval.

zapojení (a)			zapojení (b)			
$U_a/V$	$R^{(a)}/\Omega$	$I_{\text{amp}}/\text{mA}$	$U/V$	$I/\text{mA}$	$R^{(b)}/\Omega$	$\Delta/\Omega$
0.130 ± 0.006	120 ± 21	1.0 ± 0.1	0.100 ± 0.006	0.9 ± 0.1	115 ± 23	13
0.260 ± 0.006	120 ± 10	2.0 ± 0.1	0.200 ± 0.006	1.7 ± 0.1	115 ± 12	13
0.420 ± 0.006	130 ± 7	3.0 ± 0.1	0.320 ± 0.006	2.6 ± 0.1	124 ± 8	15
0.610 ± 0.006	142 ± 6	4.0 ± 0.1	0.450 ± 0.006	3.4 ± 0.1	132 ± 7	17
0.870 ± 0.006	164 ± 5	5.0 ± 0.1	0.600 ± 0.006	4.2 ± 0.1	143 ± 6	19
1.280 ± 0.006	203 ± 5	6.0 ± 0.1	0.800 ± 0.006	4.9 ± 0.1	162 ± 5	24
1.90 ± 0.01	261 ± 6	7.0 ± 0.1	1.040 ± 0.006	5.6 ± 0.1	185 ± 5	29
2.52 ± 0.01	305 ± 6	8.0 ± 0.1	1.350 ± 0.006	6.2 ± 0.1	218 ± 5	38
3.30 ± 0.03	356 ± 8	9.0 ± 0.1	2.16 ± 0.01	7.6 ± 0.1	286 ± 6	38
4.05 ± 0.03	395 ± 8	10.0 ± 0.1	2.62 ± 0.01	8.3 ± 0.1	317 ± 6	46
4.85 ± 0.03	431 ± 7	11.0 ± 0.1	3.90 ± 0.03	10.0 ± 0.1	392 ± 8	34
5.65 ± 0.03	461 ± 7	12.0 ± 0.1	4.55 ± 0.03	10.8 ± 0.2	422 ± 8	38
6.50 ± 0.03	490 ± 7	13.0 ± 0.1	5.22 ± 0.03	11.6 ± 0.2	450 ± 7	43
7.35 ± 0.03	515 ± 6	14.0 ± 0.1	5.90 ± 0.03	12.4 ± 0.2	475 ± 7	47
8.30 ± 0.06	543 ± 8	15.0 ± 0.1	6.55 ± 0.03	13.3 ± 0.2	494 ± 7	51
9.30 ± 0.06	571 ± 8	16.0 ± 0.1	7.35 ± 0.03	14.0 ± 0.2	524 ± 7	56
10.30 ± 0.06	596 ± 8	17.0 ± 0.1	9.00 ± 0.06	15.8 ± 0.2	570 ± 8	37
11.30 ± 0.06	617 ± 7	18.0 ± 0.1	9.90 ± 0.06	16.7 ± 0.2	594 ± 8	40
12.40 ± 0.06	642 ± 7	19.0 ± 0.1	10.80 ± 0.06	17.6 ± 0.2	615 ± 8	43
13.50 ± 0.06	665 ± 7	20.0 ± 0.1	11.70 ± 0.06	18.4 ± 0.2	634 ± 7	46
14.70 ± 0.06	690 ± 7	21.0 ± 0.1	12.80 ± 0.06	19.3 ± 0.2	663 ± 7	50
15.8 ± 0.1	708 ± 9	22.0 ± 0.1	13.70 ± 0.06	20.2 ± 0.2	679 ± 7	52
17.2 ± 0.1	738 ± 9	23.0 ± 0.1	14.70 ± 0.06	21.0 ± 0.2	699 ± 7	54
18.4 ± 0.1	756 ± 9	24.0 ± 0.1	17.0 ± 0.1	22.9 ± 0.2	743 ± 9	33
19.8 ± 0.1	782 ± 8	25.0 ± 0.1	18.1 ± 0.1	23.8 ± 0.3	761 ± 9	35
21.0 ± 0.1	797 ± 8	26.0 ± 0.1	19.1 ± 0.1	24.7 ± 0.3	772 ± 9	36
22.4 ± 0.1	819 ± 8	27.0 ± 0.1	20.1 ± 0.1	25.7 ± 0.3	783 ± 8	37
23.8 ± 0.1	840 ± 8	28.0 ± 0.1	21.3 ± 0.1	26.6 ± 0.3	801 ± 8	39

Tabulka 2: Měření odporu přímou metodou



Obrázek 3: Závislost odporu vlákna žárovky na proudu (před korekcí)

Hodnoty odporu vlákna spočítané podle (1) jsou systematicky chybné, a proto je v tabulce neuvádíme. Zobrazeny jsou jen později v grafu pro účely diskuze použití korekcí.

Měření odporu vlákna žárovky substituční metodou shrnuje Tabulka 3.  $I$  je zde proud, při kterém se hledal správný substituční odpor  $R_N$ , a tedy zároveň proud žárovkou,  $R$  je ze vztahu (5) a příkon  $P$  je dopočítaný podle (6).

Graficky jsou první metoda ve verzi (a) i (b) a substituční metoda shrnuty v Obrázcích 3 a 4. První zobrazuje již zmíněné nezkorigované odpory, druhý odpory po korekci. Substituční metoda je v obou grafech ovšem stejná.

Závislost odporu žárovky na jejím příkonu je v Obrázku 5. Na  $x$ -ové ose je příkon vyneseno v logaritmické škále. Odpor žárovky je pro čtyři nejnižší hodnoty příkonu konstantní a tak je extrapolace do nuly, resp. do  $-\infty$ , triviálně právě tato konstanta, tedy

$$R_0 = (120 \pm 1) \Omega.$$

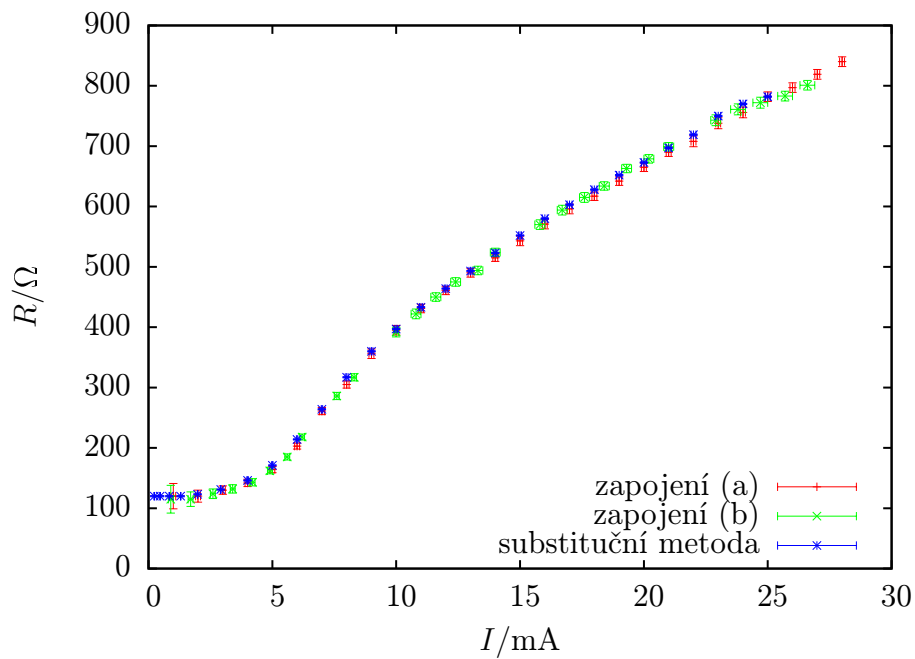
## Diskuse výsledků

Naměřený vnitřní odpor ampérmetru  $10.3 \Omega$  v zásadě dobře odpovídá výrobcem udávané hodnotě  $11 \Omega$ . Vnitřní odpory voltmetru odpovídají továrním hodnotám  $500 \Omega/V$  přesně.

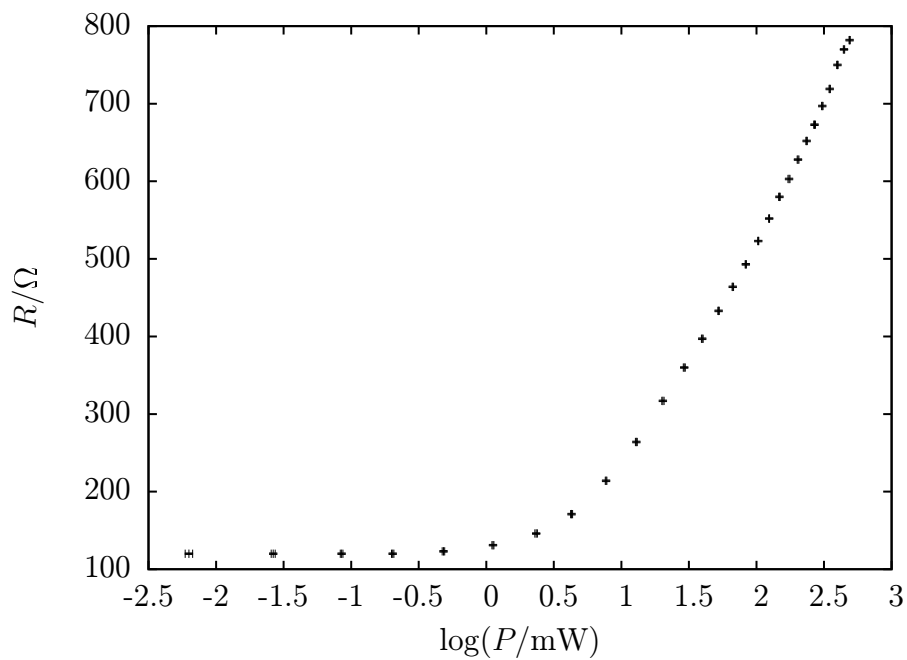
U přímé metody při zapojení (a) máme korekci pouze k odporu a to  $-R_A = -10 \Omega$ , což je srovnatelné s chybou měření, a proto se i v nezkorigovaném grafu

$I/\text{mA}$	$R/\Omega$	$P/\text{mW}$
$0.230 \pm 0.006$	$120 \pm 1$	$0.0063 \pm 0.0004$
$0.470 \pm 0.006$	$120 \pm 1$	$0.0265 \pm 0.0009$
$0.840 \pm 0.006$	$120 \pm 1$	$0.085 \pm 0.002$
$1.300 \pm 0.006$	$120 \pm 1$	$0.203 \pm 0.004$
$1.98 \pm 0.01$	$123 \pm 1$	$0.482 \pm 0.010$
$2.92 \pm 0.01$	$131 \pm 1$	$1.12 \pm 0.02$
$4.00 \pm 0.03$	$146 \pm 1$	$2.34 \pm 0.05$
$5.00 \pm 0.03$	$171 \pm 1$	$4.28 \pm 0.07$
$6.00 \pm 0.03$	$214 \pm 1$	$7.7 \pm 0.1$
$7.00 \pm 0.03$	$264 \pm 1$	$12.9 \pm 0.2$
$8.00 \pm 0.06$	$317 \pm 1$	$20.3 \pm 0.4$
$9.00 \pm 0.06$	$360 \pm 1$	$29.2 \pm 0.5$
$10.00 \pm 0.06$	$397 \pm 1$	$39.7 \pm 0.6$
$11.00 \pm 0.06$	$433 \pm 1$	$52.4 \pm 0.7$
$12.00 \pm 0.06$	$464 \pm 1$	$66.8 \pm 0.8$
$13.00 \pm 0.06$	$493 \pm 1$	$83.3 \pm 0.9$
$14.00 \pm 0.06$	$523 \pm 1$	$103 \pm 1$
$15.00 \pm 0.06$	$552 \pm 1$	$124 \pm 1$
$16.0 \pm 0.1$	$580 \pm 1$	$148 \pm 2$
$17.0 \pm 0.1$	$603 \pm 1$	$174 \pm 3$
$18.0 \pm 0.1$	$628 \pm 1$	$203 \pm 3$
$19.0 \pm 0.1$	$652 \pm 1$	$235 \pm 3$
$20.0 \pm 0.1$	$673 \pm 1$	$269 \pm 4$
$21.0 \pm 0.1$	$697 \pm 1$	$307 \pm 4$
$22.0 \pm 0.1$	$719 \pm 1$	$348 \pm 4$
$23.0 \pm 0.1$	$750 \pm 1$	$397 \pm 5$
$24.0 \pm 0.1$	$770 \pm 1$	$444 \pm 5$
$25.0 \pm 0.1$	$782 \pm 1$	$489 \pm 5$

Tabulka 3: Měření odporu substituční metodou



Obrázek 4: Závislost odporu vlákna žárovky na proudu (po korekci)



Obrázek 5: Závislost odporu žárovky na příkonu

modré body shodují s červenými.<sup>4</sup>

U zapojení (b) máme korekci k odporu až  $\Delta = 57 \Omega$  a k proudu až  $-U/R_V = -2.0 \text{ mA}$ . Obě dvě jsou silně nezanedbatelné vůči chybě měření a navíc posouvají výsledek ve stejném směru. Následkem toho se zelené body bez korekce silně rozcházejí se správnými hodnotami. Obě dvě korekce jsou také závislé na použitém rozsahu voltmetru, což způsobuje pozorovanou skokovitou závislost; jednotlivé skoky odpovídají změnám rozsahu voltmetru.

Na korigovaném grafu potom vidíme, že všechny tři metody se po korekci v rámci chyb měření bezpečně shodují. Porovnáním experimentálních chyb výsledků docházíme k tomu, že nejpřesnější je metoda substituční ( $\pm 1 \Omega$ ), metoda přímá je v obou verzích o řád nepřesnější ( $\pm 10 \Omega$ ). Toto je dáno především přesností odporové dekády vůči měřicím přístrojům. Jak bylo ale už zmíněno, při třídě přesnosti 0.2 narážíme i na omezení v podobě analogové stupnice. Pro přesnější měření přímou metodou bychom tak pravděpodobně potřebovali digitální přístroje.

Naměřený průběh závislosti odporu na proudu odpovídá očekávání. Při nízkých proudech, tedy příkonech, je teplota vlákna, a tedy odpor, téměř konstatní. Později začne teplota společně s odporem růst. Změnu v rychlosti růstu kolem 12 mA snad můžeme přičíst tepelnému záření, které závisí na  $T^4$  a tak se ve srovnání s tepelnou výměnou uplatní až při vyšších teplotách.

## Závěr

Přímou i substituční metodou jsme změřili závislost odporu vlákna žárovky na průchozím proudu. Výsledky jsou v Tabulkách 2 a 3. Graficky jsou obě metody shrnuty v Obrázku 4. Uvedené výsledky jsou zkorigované pomocí změřených vnitřních odporů měřících přístrojů. Tyto odpory jsou uvedeny v Tabulce 1. Obě dvě metody se v rámci chyby měření shodují.

Zjistili jsme, že substituční metoda je s našimi přístroji vůči metodě přímé přesnější. Dále jsme zjistili, že pro měřený rozsah odporů je systematická chyba v případě zapojení (a) výrazně menší (v rámci chyby měření téměř zanedbatelná) než v případě zapojení (b), které dává bez korekce zcela chybné výsledky.

Extrapolací odporu žárovky na nulový příkon jsme dostali její odpor při pokojové teplotě  $R_0 = (120 \pm 1) \Omega$ .

## Reference

- [1] Bakule, R. – Šternberk, J. *Fyzikální praktikum II. Elektřina a magnetismus*. Státní pedagogické nakladatelství. Praha.

---

<sup>4</sup>Kdybych při nižších proudech používal menší rozsahy, tedy větší odpory ampérmetru, systematická chyba by byla zřejmě větší. Zvlášť proto, že odpor žárovky s proudem roste.