1 Teoretická část

V úloze měříme tíhové zrychlení pomocí metody matematického a reverzního kyvadla podle [1]. V obou případech popisuje dobu kyvu T obecný vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla kolem osy otáčení, m je hmotnost kyvadla, g je gravitační zrychlení, d vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení a α úhlová amplituda výchylky těžiště z rovnovážné polohy.

Matematické kyvadlo definujeme jako hmotný bod na nehmotném závěsu konající nekonečně malé kmity. Pro jeho dobu kyvu T_m plyne z (1)

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2}$$

kde l je délka závěsu. Pro gravitační zrychlení potom dostáváme

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_m^2}. \tag{3}$$

V tomto popisu zanedbáváme rozměr a tvar závaží, hmotnost závěsu a velikost výchylky. Chybu způsobenou prvním a druhým zjistíme výpočtem skutečného momentu setrvačnosti a polohy těžiště kyvadla. Pro to budeme potřebovat následující vztahy. Objem toru o hlavním poloměru R a vedlejším r je podle [2]

$$V = (2\pi R)(\pi r^2). \tag{4}$$

Momenty setrvačnosti I_i koule kolem průměru a tyče kolem osy procházející krajním bodem jsou podle [2] po řadě

$$I_1 = \frac{2}{5}mr^2, \quad I_2 = \frac{1}{3}mL^2, \tag{5}$$

kde m je hmotnost příslušného tělesa, r poloměr koule a L je délka tyče. Dále moment setrvačnosti kolem libovolné osy je podle Steinerovy věty

$$I = I_0 + mD^2, \tag{6}$$

kde I_0 je moment setrvačnosti kolem rovnoběžné osy procházející těžištěm, m je hmotnost tělesa a D je vzdálenost obou os. A konečně poloha x_M těžiště tělesa skládajícího se z několika částí je

$$x_M = \frac{\sum x_i m_i}{M}, \tag{7}$$

kde x_i je poloha i-té části, m_i její hmotnost a $M = \sum m_i$.

Pokud se fyzické kyvadlo kývá podle dvou rovnoběžných os nesymetrických vůči těžišti se stejnou dobou kyvu T_r, potom podle [1] je tato rovna

$$T_r = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \tag{8}$$

kde l_r je vzdálenost mezi oběma osami a nazývá se redukovanou délkou. Gravitační zrychlení potom vypočteme analogicky jako z (2).

Při hledání redukované délky při fixní vzdálenosti os měníme polohu těžiště pomocí posouvatelného závaží. K nalezení správné polohy využijeme grafickou interpolaci, kdy předpokládáme lineární závislost doby kyvu na poloze závaží a ze čtyř změřených period pro dvě polohy a obě osy z průsečíku zkonstruovaných přímek vyčteme hledanou polohu.

Všechny periody měříme stopkami s optickou závorou s přesností na 6 platných číslic. Hmotnosti měříme na vahách s přesností $\pm 0.1\,\mathrm{mg}$. Délky měříme podle velikosti pásmem a pravítkem s přesností $\pm 0.1\,\mathrm{mm}$ nebo šuplerou s přesností $\pm 0.02\,\mathrm{mm}$.

1.1 Gravitační zrychlení

Podle [2] mají na velikost gravitačního zrychlení vliv především tři faktory – rotace Země, nadmořská výška a elipsoidní tvar Země. Všechny tyto efekty zahrnuje vztah

$$\frac{g}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 9.780327 + 5.1859\cdot 10^{-2}\sin^2\phi - 5.7\cdot 10^{-5}\sin^2 2\phi - 3\cdot 10^{-6}\frac{h}{\mathrm{m}},$$

kde ϕ je zeměpisná šířka a h je nadmořská výška. Obě dvě hodnoty jsme určili pomocí programu *Google Earth* jako $\phi = 50.070°$ a $h = 240\,\mathrm{m}$. Dosazením do vztahu tak dostaneme hodnotu $g = 9.810\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ s přesností na uvedené platné číslice.

1.2 Statistické zpracování

Všechny následující vztahy jsou přebrané z [3]. Chybu gaussovské veličiny x vypočítané jako průměr několika měření získáme jako

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_i (x_i - \overline{x})^2}, \tag{9}$$

kde n je počet měření, x_i jsou jednotlivá měření a $\overline{x}$ je průměr měření. Vždy, když jednu veličinu měříme opakovaně, uváděným výsledkem je průměr a chyba získaná tímto vztahem. Statistickou chybu a chybu měřidla sčítáme kvadraticky podle vztahu

$$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}. \tag{10}$$

Chyba veličiny $u = f(x_i^{n_i})$ je rovna

$$s_u = u \sum_i n_i \frac{s_{x_i}}{x_i}, \tag{11}$$

kde x_i jsou nezávislé veličiny, n_i jejich mocniny a s_{x_i} jejich chyby.

Chyby nepřepočítáváme a správná hodnota by tedy měla ve změřeném rozmezí ležet s pravděpodobností 68%.

2 Výsledky měření

Nejprve popíšeme tvar, rozměry a hmotnosti soustavy použité jako matematické kyvadlo. Závaží se skládá z kovové kuličky o průměru (23.44 ± 0.06) mm (měřeno 10krát) a závěsného háčku, který se skládá z kroužku ve tvaru toru o hlavním poloměru 2.2 mm a vedlejším 1.0 mm a válečku ze stejného drátu jako kroužek. Celý tento „háček“ má délku 0.8 mm. Hmotnost celého závaží je 55.467 g. Délka závěsu je (98.4 ± 0.3) cm,[1] hmotnost závěsu je 63 mg na 50 cm délky.[2]

Pro hmotnost závěsného háčku dostaneme z poměrů objemů háčku a kuličky hmotnost 390 mg a hmotnost závěsu je 124 mg. Těžiště celé soustavy je tak od osy otáčení vzdálené $d = (100.3 \pm 0.3)$ cm, což se od vzdálenosti středu kuličky $l = (100.4 \pm 0.3)$ cm liší o 0.01%. Vlastní momenty setrvačnosti lehkých částí jsou zanedbatelné i vůči počítané korekci (jsou jakoby až druhého řádu). Protože je moment setrvačnosti úměrný druhé mocnině polohy, bude příspěvek k němu od malých částí dvakrát větší než k poloze těžiště, tedy 0.02%. Oprava k momentu setrvačnosti od vlastního momentu kuličky je vůči uvedeným opravám zanedbatelná. Všechny kyvy probíhaly v rozpětí 8 cm. Korekční člen za nenulovou výchylku v rovnici (1) je tedy menší než 0.04%. Složením všech vyložených oprav do (1) dostaneme opravu ke gravitačnímu zrychlení +0.07%. Zdůrazněme, že hlavní roli sehrála nenulová výchylka.

Desetinásobek doby kmitu jsme změřili 10krát a použitím (9) jsme dostali $T_m = (2014.1 \pm 0.1)$ ms. Pro gravitační zrychlení pak z (3) pomocí (11) a po

[1] Chybu jsme odhadli větší než je chyba měřidla, protože pásmo se různě prohýbá a posunuje.

[2] U malých veličin neuvádíme explicitně chybu, protože poslouží pouze pro výpočet korekce.

započítání opravy, která činí +1 na poslední platné číslici dostaneme

$$g_1 = (9.78 \pm 0.03)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Při hledání správné polohy posuvného závaží na čočce jsme interpolační metodu použili dvakrát za sebou. Poté jsme ještě polohu jemně doladili. Nakonec jsme čtyřikrát změřili 10násobek periody a dostali v normální poloze[3] periodu (2004.22 ± 0.02) ms a v reverzní (2003.43 ± 0.05) ms. Protože perioda v reverzní poloze závisela na poloze závaží mnohem výrazněji, použijeme pro výpočet normální polohu. Z interpolačních grafů jsme odhadli chybu určení T_r na ± 0.2 ms. Vzdálenost mezi oběma osami jsme změřili jako $l_r = (99.3 \pm 0.3)$ cm. Gravitační zrychlení je potom stejným způsobem jako v první části a po započtení stejné opravy

$$g_2 = (9.77 \pm 0.03)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

3 Diskuze výsledků

V rámci chyby měření se oba výsledky shodují. Chyba je v obou případech způsobena hlavně nepřesností pásového měřidla. Měření přibližně metrových vzdáleností s přesností lepší než milimetr je ale běžnými metodami téměř neproveditelné. V případě reverzního kyvadla by šlo jedno přesné měření provést ihned po výrobě a tento údaj by byl potom při dané teplotě konstantní. Pořád bychom se ale potýkali s obrušováním hrotů.

Teoretický výsledek je na kraji rozsahu chyby měření. V obou případech je ale odchylka stejně velká a stejným směrem, což naznačuje systematickou chybu. Z jevů, které mohou mít na výsledek vliv, jsme nezapočítali odpor vzduchu. $0.3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tomu v případě kuličky odpovídá podle Newtonova vzorce síla asi 10^{-5} N, což je zhruba 10000krát méně než zrychlující složka gravitační síly v největší výchylce. Nelze tedy očekávat, že by měl mít odpor vzduchu vliv na třetí platné číslici. Jediná společná část obou experimentů byly stopky, jejich porucha je ale málo pravděpodobná.

4 Závěr

Metodou matematického kyvadla jsme naměřili hodnotu gravitačního zrychlení

$$g = (9.78 \pm 0.03)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

[3] tedy se závažím dole

Metodou reverzního kyvadla jsem ji určili jako

$$g = (9.77 \pm 0.03)\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

V případě matematického kyvadla jsme korekci od všech zanedbání určili jako +0.07%, hlavní roli hrála nenulová výchylka kyvu. Toto se vztahuje i na případ reverzního kyvadla, a proto jsme korekci započítali i tam.

Oba výsledky se v rámci chyby shodují navzájem, teoretická hodnota je na hranici rozsahu chyby. V obou případech je ale odchylka stejná, to se nám nepodařilo vysvětlit.

Reference

[1] `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`. Studijní texty Praktika I

[2] `http://en.wikipedia.org/`. The Free Encyclopedia

[3] Vybíral B.: *Zpracování dat fyzikálních měření*. Studijní text FO