1 Teoretická část

V úloze máme za úkol ověřit platnost Einsteinova vztahu pro Brownův pohyb, určit aktivitu A Brownova pohybu částic latexu ve vodě a vypočíst Avogadrovu konstantu.

Brownovým pohybem nazýváme náhodný pohyb malých částic ve vodě, způsobený nárazy molekul vody. Podle [1] pro něj Einstein odvodil vztah

$$\overline{x_t^2} = kAt, \tag{1}$$

kde $\overline{x_t^2}$ je střední kvadratické posunutí částice za čas t, k je počet stupňů volnosti pohybu částice v rámci pozorování a A je tzv. aktivita Brownova pohybu. My budeme sledovat pohyb částice v rovině a k bude tedy rovno 2. Pokud tento vztah platí musí být splněno

$$\overline{x_t^2} : \overline{x_{nt}^2} = 1 : n, \tag{2}$$

čímž budeme také platnost (1) ověřovat.

Pro Brownův pohyb kulové částice o poloměru r lze podle [1] odvodit vztah

$$A = \frac{RT}{3\pi\eta r N_A}, \tag{3}$$

kde $R = 8.314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ je molární plynová konstanta, T je teplota roztoku, η je dynamická viskozita roztoku a N_A je Avogadrova konstanta. Pro viskozitu roztoku kulových částic platí

$$\eta = \eta_0(1 + 2.5\varphi), \tag{4}$$

kde η_0 je viskozita čistého rozpouštědla a φ je objemová koncentrace částic.

Budeme pozorovat částice latexu ve vodném roztoku pomocí mikroskopu. Obraz z mikroskopu je přenášen na monitor, na kterém pomocí folie zaznamenáváme pohyb částice.

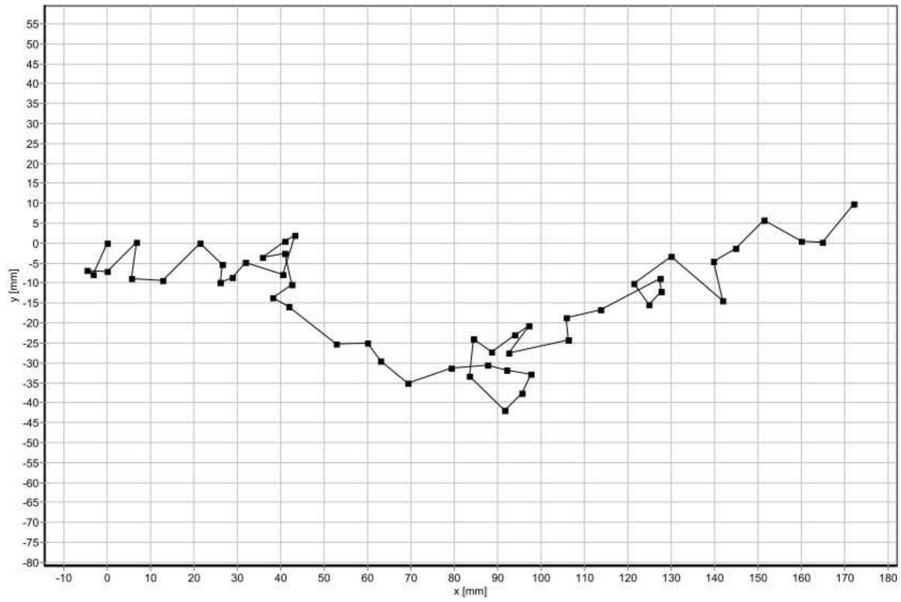
1.1 Statistické zpracování

Všechny následující vztahy jsou přebrané z [2]. Chyba veličiny $u = f(x_i^{n_i})$ je rovna

$$s_u = u \sum_i n_i \frac{s_{x_i}}{x_i}, \tag{5}$$

kde x_i jsou nezávislé veličiny, n_i jejich mocniny a s_{x_i} jejich chyby.

Chyby nepřepočítáváme a správná hodnota by tedy měla ve změřeném rozmezí ležet s pravděpodobností 68%.



Obrázek 1: Původní trajektorie

2 Výsledky měření

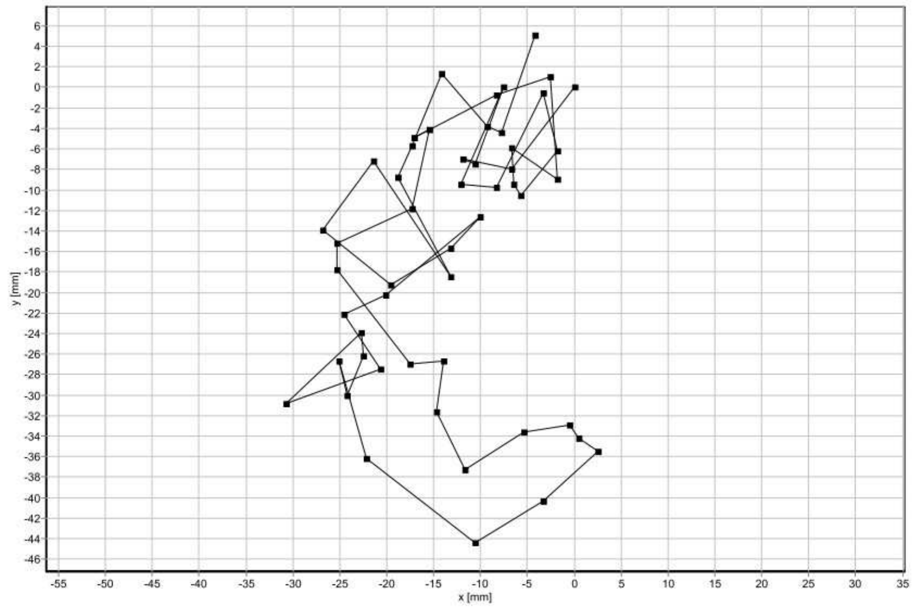
Při experimentu se nám nepodařilo dosáhnout stavu, kdy by částice netekly žádným směrem. Každá odměřená trajektorie tak měla zřejmé posunutí v určitém směru. Pro statistické zpracování jsme vybrali tu nejméně tekoucí a tok od ní odečetli následujícím způsobem. Vektor od počátku do konce trajektorie jsme vydělili počtem posunutí a výsledek odečetli od každého jednotlivého posunutí. Tím jsme dostali trajektorii částice s nulovým celkovým posunutím. Na Obrázku 1 je původní a na Obrázku 2 upravená trajektorie. Statistickým zpracováním upravené trajektorie programem *Brown* jsme dostali poměry

$$\overline{x_t^2} : \overline{x_{2t}^2} : \overline{x_{3t}^2} : \overline{x_{4t}^2} = 1 : (2.0 \pm 0.4) : (2.6 \pm 0.5) : (3.6 \pm 0.7),$$

čímž jsme podle (2) v rámci přesnosti měření potvrdili platnost Einsteinova vztahu.[1]

K výpočtu poměrů stačily relativní posunutí a nezáleželo na zvětšení. Při výpočtu A jej ale musíme započítat. Kalibraci jsme provedli změřením 5 dílků 0.01mm stupnice na monitoru. V závislosti na poloze jsme naměřili (8.2 ± 0.3) cm, čemuž odpovídá zvětšení 1640 ± 40. Z programu jsme dostali

[1]Vzhledem k tomu, že je to vztah statistický, nelze jej nikdy zcela potvrdit. Místo potvrdili bychom tak měli psát spíše nevyvrátili.



Obrázek 2: Upravená trajektorie

hodnotu $\overline{x'^2_t} = (59 \pm 7)\,\mathrm{mm}^2$, čemuž po přepočtu odpovídá

$$\overline{x^2_t} = (2.2 \pm 0.4)\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^2.$$

Při zaznamenávání polohy jsme se při určování správného časového intervalu řídili zvukovým signálem s udanou periodou 10 s. Stopkami jsme naměřili dobu 10 period 96 s. Při zaznamenávání polohy částice ale jistě docházelo k chybám, které jsme odhadli na ± 0.3 s. Máme tedy

$$t = (9.6 \pm 0.3)\,\mathrm{s}.$$

Z těchto dvou hodnot a ze vztahu (1) pak máme

$$A = (1.14 \pm 0.23)\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Experiment probíhal při teplotě vzduchu $T = 298.5\,\mathrm{K}$, což byla také teplota roztoku. Dynamická viskozita čisté vody při této teplotě je podle [3] $\eta_0 = 8.81\cdot 10^4\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Objemová koncentrace částic byla podle informacím k úloze $\varphi = 1/600$ a ze vztahu (4) tak máme $\eta = 8.85\cdot 10^4\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Poloměr částic byl podle téhož $r = 425\,\mathrm{nm}$ a jeho chybu budeme považovat za zanedbatelnou vzhledem k ostatním. Použitím uvedených hodnot a vztahu (3) tak dostaneme

$$N_A = (6.1 \pm 1.3)\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}.$$

3 Diskuze výsledků

Úprava trajektorie, kterou jsme použili, jistě není zcela správná. Pokud je N počet kroků částice, máme totiž $\overline{x_{Nt}^2} = 0$, což zřejmě odporuje (1). Proto jsou také výsledné poměry nižší než očekávané. My jsme se ale lokálně potřebovali zbavit vlivu toku na $\overline{x_t^2}$ a toho jsme dosáhli. Také lze říci, že pokud by byly trajektorie „na pohled“ netekoucí, žádnou korekci bychom neprováděli, ačkoli by nějaký malý tok mohl být přítomný. Systematické chybě způsobené tokem se tak prakticky nelze vyhnout. Museli bychom tok detekovat jinak, např. pohybem nějakých výrazně větších částic, u kterých by byl Brownův pohyb zanedbatelný.

Naměřená hodnota Avogadrovy konstanty se velmi dobře shoduje s tabelovanou hodnotou $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$. Největší chybu (60%) do měření vnesla samotná statistika kvadratických posunutí. Chyba $\pm 7\,\mathrm{mm}$ je mnohem větší než chyba způsobená lidským faktorem při zaznamenání polohy. Řešením by tedy byl pouze větší počet naměřených poloh. K tomu bychom potřebovali docílit netekoucího prostředí, aby částice neutíkaly z obrazu. To se nám ovšem nepodařilo. Další řešením by bylo snížení časového intervalu. Potom ovšem vznikaly nepřehledné trajektorie a částice se nám ve změti teček často ztratila.

Druhá největší chyba (25%) byla vnesená obrazovkou, která byla zakřivená. V různých místech se tedy stejná vzdálenost zobrazovala na různé, což měření zatížilo chybou. Řešením by mohlo být například použití plochého monitoru. O zbytek chyby (15%) se postaral časový interval. Člověku prostě nějaký čas trvá než částici po zvukovém signálu fixem přesně lokalizuje a zakreslí patřičnou tečku. Řešením by zde byl například záznam celé trajektorie na video a následné celé zpracování v počítači.

4 Závěr

V rámci chyby měření jsme potvrdili[2] vztah (1). Naměřili jsme aktivitu Brownova pohybu

$$A = (1.14 \pm 0.23) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Využitím teoretického vztahu pro tuto hodnotu jsme potom dopočítali Avogadrovu konstantu jako

$$N_A = (6.1 \pm 1.3) \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}.$$

[2] ve smyslu výše okomentovaném

Reference

[1] http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/. Studijní texty Praktika I

[2] Vybíral B.: *Zpracování dat fyzikálních měření*. Studijní text FO

[3] http://www.thermexcel.com/.