Pracovní úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B$ ... doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = B$ ... doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0$, $y_2 = B$
      i. doba kmitu T_3
      ii. doba $T_4/4$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro 3 a 4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

Teoretický úvod

Pro periodický děj s periodou T se zavádí veličina úhlová frekvence (dále jen frekvence) vztahem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Fyzické kyvadlo popisujeme v aproximaci malých kmitů lineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Jejím řešením je harmonický pohyb. Pokud dvě identická kyvadla spojíme pružnou vazbou s lineární odezvou, popíšeme tento systém soustavou dvou takových rovnic. Jejich řešením je potom lineární kombinace dvou harmonických pohybů o různých frekvencích.

Pro speciální počáteční podmínky lze pohyb popsat i jednodušeji. Podle [1] kmitají při stejných počátečních výchylkách obě kyvadla harmonicky bez fázového posunu s frekvencí ω_1 rovnou frekvenci kmitů ω_0 bez vazby. Při stejně velkých ale opačných počátečních výchylkách kmitají kyvadla harmonicky s fázovým posunem π a s větší frekvencí ω_2. Při nulové počáteční výchylce jednoho z kyvadel jsou kmity opět harmonické s posunem π s frekvencí ω_3, jen amlituda kmitů není konstantní, ale mění se s časem také harmonicky s frekvencí ω_4 a fázovým posunem $\pi/2$.

Z řešení zmíněných rovnic se dají odvodit vztahy

$$\omega_3 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \qquad \omega_4 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1). \tag{2}$$

Pro vázané kmity se zavádí veličina stupeň vazby

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}. \tag{3}$$

Statistické zpracování

Hodnotu veličiny změřené opakovaně uvádíme jako $\overline{x} \pm \sqrt{s_{\overline{x}}^2 + \delta^2}$, kde

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \overline{x})^2}$$

a δ je chyba měřidla. Chybu veličiny $u = f(x_i^{n_i})$ počítáme ze vztahu

$$\delta_u = u \sum_i n_i \frac{\delta_{x_i}}{x_i},$$

kde x_i jsou nezávislé veličiny, n_i jejich mocniny a δ_{x_i} jejich chyby. Měřená veličina by měla v daném rozmezí ležet s pravděpodobnosti asi 70%.

Při fitování vztahu na naměřená data používáme program *Gnuplot*. Ten aplikuje metodu nejmenších čtverců. V případě lineárního fitování jsou parametry dopočítány přímo pomocí algebry, v případě nelineárního se hledají pomocí iterativní minimalizace. Chyby parametrů fitu jsou počítány způsobem který je ekvivalentní výpočtu standardní směrodatné odchylky, a proto s nimi budeme zacházet právě tak. Při každém fitování uvádíme hodnotu

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y(x_i))^2}{y(x_i)},$$

kde n je počet dat, p počet fitovaných parametrů, y_i naměřená hodnota a $y(x_i)$ hodnota očekávaná z nafitovaného vztahu. Pro data, která podléhají Gaussovu rozložení, je očekávaná hodnota χ^2 rovna 1. Vyšší hodnota ukazuje na nadceněnou přesnost dat, systematickou chybu nebo špatný model. Nižší hodnota na podceněnou přesnost dat.

Výsledky měření

Vliv teploty nebo tlaku vzduchu na výsledky experimentu jsou zanedbatelné v rámci přesnosti měření. Použitá kyvadla měla délku (100 ± 1) cm a všechny počáteční výchylky měly velikost (30 ± 1) mm. Časy jsme měřili ručními stopkami s přesností ± 0.01 s.

Nejprve jsme proměřili časy $10T_0$ vlastních kmitů obou použitých kyvadel vždy 3krát. V obou případech jsme dostali $T_0 = (1.900 \pm 0.003)$ s.[1] Pro další práci tedy můžeme oprávněně předpokládat dvě identická kyvadla.

Dále jsme pro dvě různé vazby realizované pružinami změřili časy $N_i T_i$ vždy n_i-krát. Výsledky i s dopočítanými úhlovými frekvencemi shrnují Tabulky 1 a 2. První pružina byla uchycena ve vzdálenosti (40.0 ± 0.2) cm od závěsů kyvadel, druhá ve vzdálenosti (26.0 ± 0.2) cm. Pro první pružinu jsme ze vztahu (3) dopočítali $\kappa = (0.083 \pm 0.003)$, pro druhou potom $\kappa = (0.029 \pm 0.001)$.

i	1	2	3	4
N_i	10	10	5	1/4
n_i	3	3	4	7
T_i/s	1.910 ± 0.003	1.758 ± 0.003	1.840 ± 0.006	46.6 ± 0.6
ω_i/s^{-1}	3.290 ± 0.005	3.574 ± 0.007	3.416 ± 0.011	0.135 ± 0.002

Tabulka 1: Hodnoty ω_i a T_i pro 1. pružinu

i	1	2	3	4
N_i	10	10	10	1/4
n_i	3	3	3	7
T_i/s	1.899 ± 0.003	1.844 ± 0.002	1.878 ± 0.003	106.5 ± 1.0
ω_i/s^{-1}	3.309 ± 0.005	3.408 ± 0.003	3.345 ± 0.006	0.059 ± 0.001

Tabulka 2: Hodnoty ω_i a T_i pro 2. pružinu

Chyba u časů T_4 je kromě chyby lidského oka a reakcí způsobena i tím, že je obtížné odhadnout okamžik, ve kterém je amplituda kmitů nulová. Proto je chyba u T_4 relativně větší než u ostatních.

Ze vztahů (2) jsme pro první pružinu dostali $\omega_3 = (3.432 \pm 0.006)\,\mathrm{s}^{-1}$ a $\omega_4 = (0.142 \pm 0.006)\,\mathrm{s}^{-1}$ a pro druhou $\omega_3 = (3.358 \pm 0.004)\,\mathrm{s}^{-1}$ a $\omega_4 = (0.050 \pm 0.004)\,\mathrm{s}^{-1}$.

Dále jsme pro druhou pružinu proměřili závislost stupně vazby na vzdálenosti d vazby od závěsů. Pro každou polohu jsme měřili čas $10T_2$ vždy 2krát. Jako T_1 jsme použili T_0. Výsledky s dopočítanými stupni vazby shrnuje tabulka 3. Většina κ byla určena s přesností ± 0.002.

Diskuse výsledků

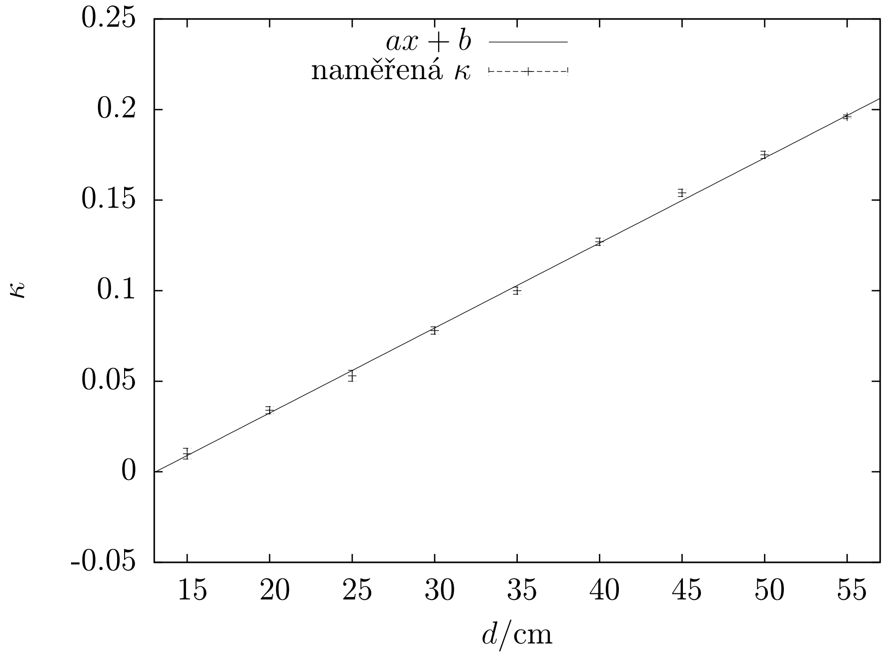
Tři z čtyř teorií předpovězených hodnot ω_3, ω_4 se shodují v rámci chyby s naměřenými hodnotami, což odpovídá použité 70%-ní chybě měření.

V Obrázku 1 je vynesena závislost $\kappa(d)$ s proloženou lineární závislostí. Kvalita fitu je $\chi^2 = 1.4$ a lineární model je tedy vyhovující.

[1] Absolutní shoda je jistě náhodná, zcela přijatelná by byla i shoda v rámci chyby.

d/cm	15	20	25	30	35	40	45	50	55
T_2/s	1.882	1.867	1.849	1.825	1.802	1.776	1.748	1.726	1.704
κ	0.010	0.034	0.053	0.078	0.100	0.127	0.154	0.175	0.196

Tabulka 3: Závislost $\kappa(d)$



Obrázek 1: Závislost stupně vazby na poloze vazby

Závěr

Doba kmitu nevázaných kyvadel vyšla u obou $T_0 = (1.900 \pm 0.003)\,\mathrm{s}$. Doby kmitů a frekvence pohybů vzešlých z různých počátečních jsou v Tabulkách 1 a 2. Platnost vztahů (2) jsme potvrdili v rámci přesnosti měření. Stupeň vazby byl (0.083 ± 0.003) u první pružiny a (0.029 ± 0.001) u druhé. Závislost stupně vazby na její vzdálenosti od závěsu kyvadel shrnuje Tabulka 3 a zobrazuje Obrázek 1.

Reference

[1] *Studijní texty Praktika I* [online]. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`.