

### Pracovní úkol:

1. Změřte tuhost pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle.
3. Změřte tuhost pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení.
5. Sestrojte grafy závislosti:
  - (a)  $\omega = f(\sqrt{k})$
  - (b)  $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{\mu}})$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

## 1 Teoretický úvod

Pohyb závaží na pružině v gravitačním poli lze podle [1] matematicky popsat diferenciální rovnicí

$$\mu\ddot{y} + ky = -\mu g, \quad (1)$$

kde  $\mu = M + \frac{m}{3}$  je tzv. redukovaná hmotnost,  $M$  hmotnost závaží,  $m$  hmotnost pružiny,  $y$  výchylka pružiny od nulové délky,  $k$  tuhost pružiny a  $g$  gravitační zrychlení.

Řešením této rovnice jsou dva případy, kmitavý pohyb a nehybný stav. První popíšeme periodou kmitu  $T$ , pro kterou dostaneme vztah

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2 = k \left(\frac{1}{\mu}\right), \quad (2)$$

kde  $\omega$  je tzv. úhlová frekvence. V nehybném stavu nás bude zajímat výchylka  $\Delta y$  oproti stavu bez zavěšeného závaží. Pro ni dostaneme vztah

$$\Delta y = \frac{1}{k}(Mg). \quad (3)$$

Tyto dva vztahy použijeme k určení tuhosti pružin. První způsob se podle [2] nazývá metoda dynamická, druhý metoda statická. Zkombinováním vztahů (2) a (3) dostaneme rovnici

$$\omega^2 = g \left(\frac{M}{\mu\Delta y}\right), \quad (4)$$

ze kterého získáme hodnotu gravitačního zrychlení.

Přidáním členu  $\pi S \rho y_m \dot{y} / \tau$ , kde  $S$  je plocha průřezu závaží,  $\rho$  hustota vzduchu a  $y_m$  amplituda kmitu, na levou stranu (1) můžeme řádově odhadnout opravu k tuhosti pružiny za odpor vzduchu jako

$$\Delta k = \left( \frac{S \rho y_m}{4\mu} \right)^2. \quad (5)$$

## 1.1 Gravitační zrychlení

Dílem pro potřeby úlohy a dílem ze zvědavosti jsme se pokusili co nejpřesněji vypočítat gravitační zrychlení v místě měření. Podle [3] mají na jeho velikost vliv především tři faktory – rotace Země, nadmořská výška a elipsoidní tvar Země. Všechny tyto efekty zahrnuje vztah

$$\frac{g}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 9.780327 + 5.1859 \cdot 10^{-2} \sin^2 \phi - 5.7 \cdot 10^{-5} \sin^2 2\phi - 3 \cdot 10^{-6} \frac{h}{\text{m}},$$

kde  $\phi$  je zeměpisná šířka a  $h$  je nadmořská výška. Obě dvě hodnoty jsme určili pomocí programu *Google Earth* jako  $\phi = 50.070^\circ$  a  $h = 240$  m. Dosazením do vztahu tak dostaneme hodnotu  $g = 9.81005 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  s přesností na uvedené platné číslice.

## 1.2 Statistické zpracování

U všech částí úlohy jsme pro získání hodnot veličin využili lineární regresi tak, jak je popsána např. na [3]. Chyby nepřepočítáváme a správná hodnota by tedy měla ve změřeném rozmezí ležet s pravděpodobností 68%.

## 1.3 Aparatura

Výchytky pružin jsme měřili katetometrem s přesností 0.1 mm. Díky jisté tuhosti posuvné části, nenulové tloušťce nitkového kříže a dalším faktorům jsme ale při opakovaném měření téže vzdálenosti dosáhli přesnosti pouze 0.4 mm, se kterou tedy budeme dále počítat. Periodu jsme měřili ručními stopkami s přesností 0.01 s. Hmotnosti závaží a pružin jsme měřili dvěma různými váhami, do 150 g s přesností 0.1 mg a nad 150 g s přesností 0.1 g.

## 2 Výsledky měření

Teplota vzduchu po čas experimentu rostla v rozmezí 21.3–22.9 °C.

$i$	1	2	3	4	5
$m_i/g$	1.803	3.03	6.29	6.12	1.99

Tabulka 1: Hmotnosti pružinek

$j$	5	10	20	30	50	100	200	500
$M_j/g$	5.010	10.02	20.01	30.02	50.07	99.84	200.1	500.0

Tabulka 2: Hmotnosti závaží

Hmotnosti použitých závaží a pružin shrnují Tabulky 1 a 2. Přesnost je udaná podle potřeb dalších výpočtů.

Prodloužení pružin v závislosti na zavěšeném závaží shrnuje Tabulka 3. Data italikou nebyla nakonec použita při zpracování, protože byla zřetelně odlehlá.

Fitováním (3) na naměřená data potom dostaneme tuhosti pružin v Tabulce 4 v řádku  $k_s$ .

Periody kmitů v závislosti na zavěšeném závaží shrnuje Tabulka 5. Měřili jsme vždy dobu  $10T$ . Dupočítané redukované hmotnosti neuvádíme, ale při zpracování jsme použili právě je. Závaží s indexem 150 je tvořeno závažím 50 a 100. Data italikou opět nebyla dále zpracována pro odlehlost.

Fitováním (2) na naměřená data dostaneme tuhosti pružin v Tabulce 4 v řádku  $k_d$ . Dosazením naměřených hodnot do (5) zjistíme, že vliv odporu vzduchu je v rámci naší přesnosti zcela zanedbatelný. (O několik řádu menší než chyba.)

Pro fitování (4) na parametr  $g$  byly použity všechny kombinace dat z Tabulek 3 a 5 kromě pružiny 1 se závažím 50 a pružiny 3 se závažím 100, které byly odlehlé. Výsledkem je hodnota gravitačního zrychlení  $g = (9.73 \pm 0.07) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\Delta y_{ij}/\text{cm}$	5	10	20	30	50	100	200	500
1	1.15	2.35	4.75	7.07	11.80			
2		<i>1.97</i>	3.13	4.65	7.97	15.48		
3		1.34	2.69	4.11	6.80	<i>11.55</i>		
4			1.01	1.53	2.51	5.01	10.14	
5				0.69	1.15	2.22	4.38	<i>10.62</i>

Tabulka 3: Prodloužení pružinek

$i$	1	2	3	4	5
$k_{s,i}/\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$	$4.16 \pm 0.01$	$6.30 \pm 0.04$	$7.22 \pm 0.03$	$19.40 \pm 0.04$	$44.5 \pm 0.4$
$k_{d,i}/\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$	$4.1 \pm 0.1$	$6.17 \pm 0.04$	$7.13 \pm 0.03$	$19.2 \pm 0.3$	$46.3 \pm 0.5$

Tabulka 4: Tuhosti pružiny

$T_{ij}/\text{s}$	10	20	30	50	100	150	200	500
1	0.31	0.44	0.55	0.80				
2		0.37	0.45	0.57	0.80			
3		0.35	0.42	0.54	0.75			
4			0.25	0.32	0.46		0.65	
5					0.29	0.36	0.42	0.65

Tabulka 5: Perioody kmitů

### 3 Diskuse výsledků

Tuhosti pružin nemůžeme porovnat s žádnými tabelovanými hodnotami, ale jen v rámci dvou metod, které jsme použili. Naměřené tuhosti se většinou v rámci chyby shodují nebo by se překrývali při trojnásobné chybě. Vždy je ovšem hodnota z dynamické metody nižší.

Systematickou chybu mohla způsobit řada věcí, odpor vzduchu jsme vyloučili. Stejně tak nedokonalou linearitu pružin jsme vyloučili v první části úlohy. Vliv mohly mít boční kmity, které nastávaly hlavně pro kratší periody. Závaží začalo kmitat do stran a postupně přešlo z kmitání v kývání se samozřejmě delší periodou. To by vysvětlovalo pozorovanou systematickou neshodu. Jiným efektem je útlum kmitů způsobený přeměnou kinetické energie na tepelnou. Tím by se ale měla měnit převážně amplituda, nikoli frekvence. V úvahu připadají ještě špatné váhy nebo katetometr. Z předchozích úvah plyne, že přesnější<sup>1</sup> jsou hodnoty ze statické metody.

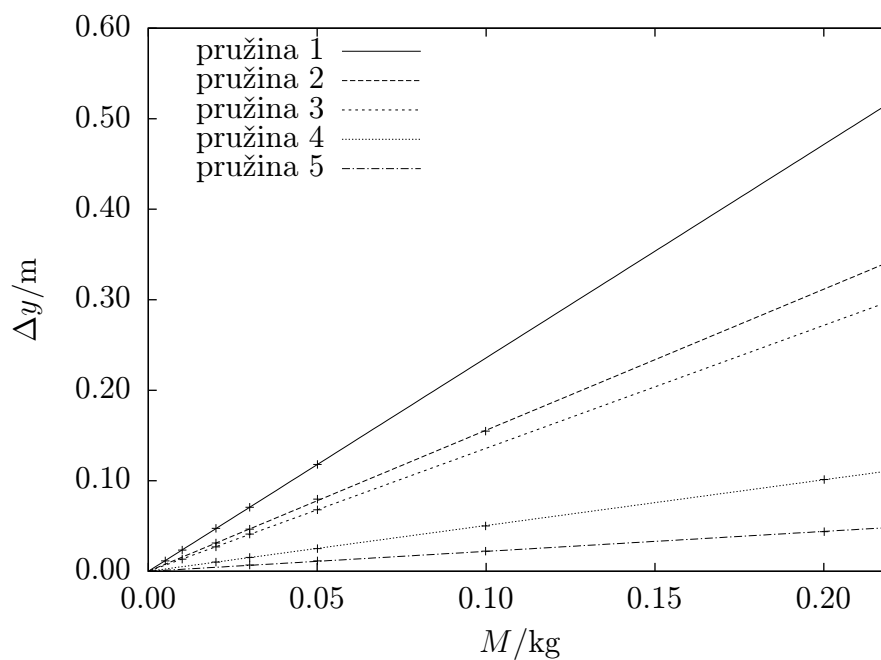
Ze stejného důvodu pravděpodobně vyšlo gravitační zrychlení příliš malé. Teoretická hodnota je takto na okraji chyby měření. Což je ovšem vzhledem k zvolené pravděpodobnosti v pořádku.

### 4 Závěr

Naměřené tuhosti shrnuje Tabulka 4. Naměřili jsme hodnotu lokálního gravitačního zrychlení rovnou  $(9.73 \pm 0.07) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Na Obrázku 1 jsou vyneseny závislosti prodloužení na zavěšené hmotnosti

<sup>1</sup>ve smyslu systematické chyby



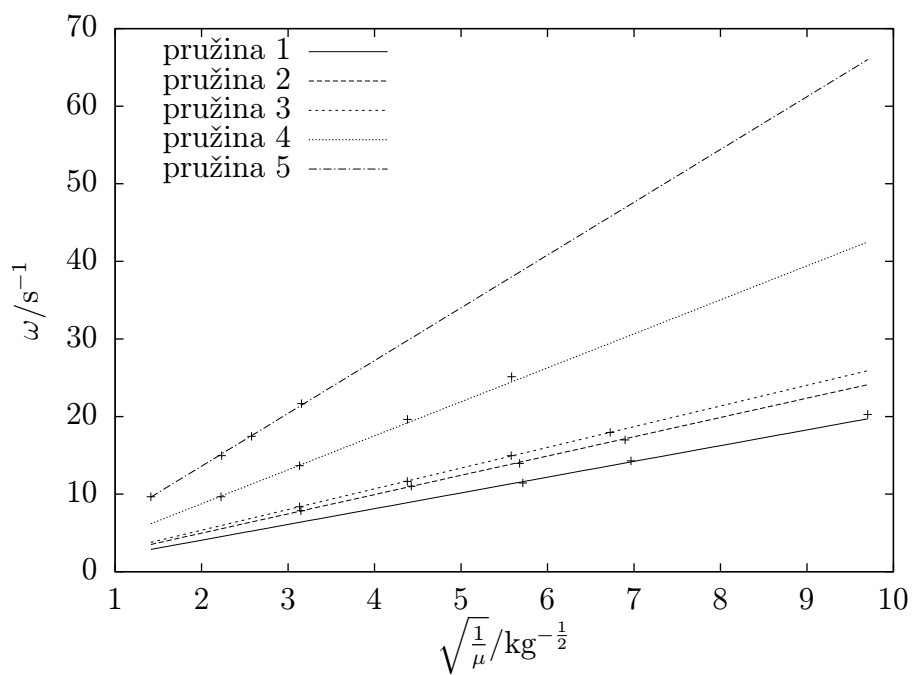
Obrázek 1: Závislost prodloužení pružin

z Tabulky 3.

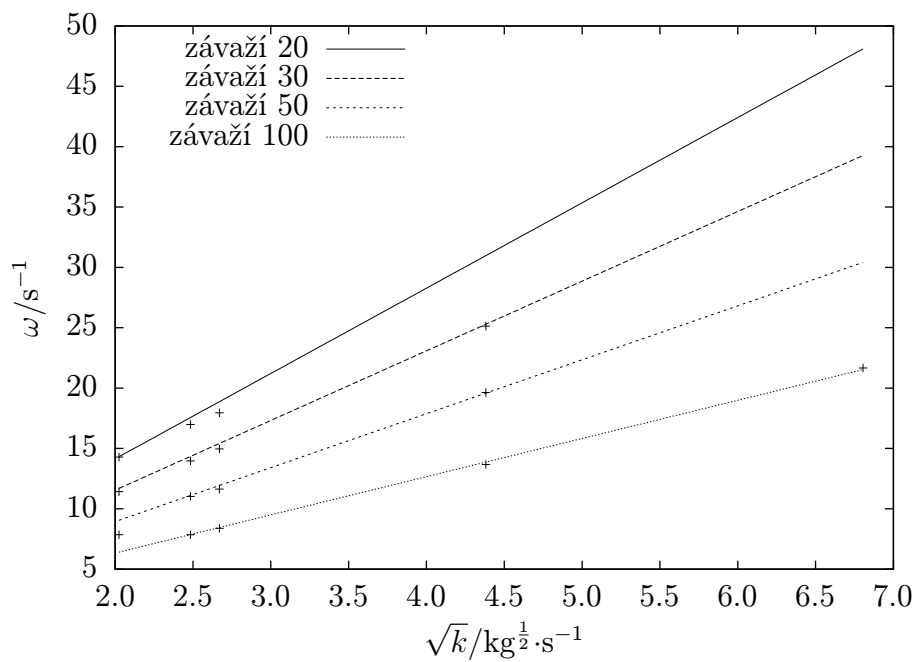
Na Obrázcích 2 a 3 jsou vyneseny závislosti  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{\mu}}\right)$  a  $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$  proložené teoretickými lineárními funkcemi.

## Reference

- [1] Šedivý P., Volf I., Horáková R.: *Harmonické kmity mechanických soustav*. Studijní text FO
- [2] <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>. Studijní texty Praktika I
- [3] <http://en.wikipedia.org/>. The Free Encyclopedia



Obrázek 2: Závislost  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{\mu}}\right)$



Obrázek 3: Závislost  $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$