Úloha 1

Označme $K = Q/2\pi\varepsilon_0$. Ve vakuu je $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$. Na ploše $z = 0$ je $\mathrm{d}S_j = \delta_{jz} R \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}R$, a tak nám stačí znát složky T_{iz} pro výpočet integrálu. Ze zadání máme

$$\boldsymbol{E} = \frac{K}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dosazením do definičního vztahu v zadání

$$T_{iz} = -\frac{\varepsilon_0 K^2 R^2 \delta_{iz}}{2(R^2 + a^2)^3}.$$

Z toho $F_x = F_y = 0$ a

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{\varepsilon_0 K^2}{2} \int \frac{R^3 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}R}{(R^2 + a^2)^3} = -\pi\varepsilon_0 K^2 \int \frac{R^3 \mathrm{d}R}{(R^2 + a^2)^3} \\ &= -\frac{\pi\varepsilon_0 K^2}{4a^2} = -\frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Úloha 2

Pole dipólu $\boldsymbol{m}$ umístěného v počátku souřadnic je

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{3(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^5} \right).$$

Ze zadání $\boldsymbol{m} = (0, 0, m)$. Stačí zkoumat zřejmě jen závislost pole na zeměpisné šířce φ, a pokud se omezíme na nultý poledník, dostaneme $\boldsymbol{r} = R(\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, kde R je poloměr Země. Dosazením

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{m}{R^3} \begin{pmatrix} 3\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 \\ 3\sin^2\varphi - 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{m}{R^3} \sqrt{9\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 9\sin^4\varphi - 6\sin^2 + 1} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{m}{R^3} \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

Z toho nejmenší pole bude na rovníku a největší na pólech. Poměr jejich intenzit bude

$$\frac{\sqrt{5+3}}{\sqrt{5-3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Úloha 3

V úpravách budeme implicitně využívat $\boldsymbol{m}_i = m_i \boldsymbol{e}_z$. Umístěme spodní smyčku do počátku. Její pole na ose z je

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_1}{r^5}\right) = \frac{\mu}{2\pi}\frac{m_1}{z^3}\boldsymbol{e}_z.$$

Protože $h \gg a$, můžeme v dobrém přiblížení uvažovat pole v místě horní smyčky všude stejné, tj. blízko osy stejné jako na ose. Sílu působící na horní smyčku dostaneme jako

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{B}) = -\frac{3\mu}{2\pi}\frac{m_1 m_2}{z^4}\boldsymbol{e}_z,$$

a protože $m_i > 0$, smyčky se budou přitahovat. Po dosazení momentů a vzdálenosti

$$F = \frac{3\pi\mu}{2}\frac{I_1 I_2 a^4}{h^4}.$$

Úloha 4

1) Víme, že $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Dále jediná nenulová složka $\boldsymbol{A}$ je A_ϕ a $\partial_\phi A_\phi = 0$, z čehož $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$. Teď už můžeme postupně ověřovat platnost Maxwellových rovnic. Je $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$, platnost rovnic pro $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ a $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ je splněna automaticky díky potenciálům a nulovosti $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ a zbývá ověřit poslední rovnici. Je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{m''}{r^2} + \frac{n''}{r}\right)c^2 \sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{1}$$

a

$$\begin{aligned} c^2\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = -c^2\Delta\boldsymbol{A} &= -c^2\left(\frac{(rf)''}{r} - \frac{2f}{r^2}\right)\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\phi \\ &= -\left(\frac{m''}{r^2} - \frac{2m'}{r^3} + \frac{n''}{r} - \frac{2n}{r^3}\right)c^2\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned} \tag{2}$$

Poslední z Maxwellových rovnic dává do rovnosti (1) a (2), z čehož vidíme, že musí platit $m' + n = 0$.

2) Poyntingův vektor je

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

což můžeme feynmanovsky přepsat jako

$$\begin{aligned}
\mu\boldsymbol{S} &= \nabla_A(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} \\
&= \frac{n'}{r} c \sin\vartheta \nabla \left(\frac{n}{r}\sin\vartheta\right) - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \phi} \\
&= \frac{n'}{r} c \sin\vartheta \left(\frac{n'r - n}{r^2}\sin\vartheta \boldsymbol{e}_r + \frac{n}{r^2}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta\right) \\
&= \frac{c}{r^3}\begin{pmatrix} [(n')^2 r - nn']\sin^2\vartheta \\ nn'\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

kde poslední vektor je ve sférické bázi.

3) Pokud $m(r) = m$, z 1) víme, že $n = 0$, a tedy

$$\boldsymbol{A} = \frac{m}{r^2}\sin\vartheta \boldsymbol{e}_\phi.$$

Z nulového skalárního potenciálu je zřejmé, že zdrojem pole mohou být jen uzavřené proudové smyčky. Rotací vektorového potenciálu dostaneme

$$\boldsymbol{B} = \frac{2m\cos\vartheta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{m\sin\vartheta}{r^3}\boldsymbol{e}_\vartheta,$$

což můžeme pomocí $\boldsymbol{e}_z = \cos\vartheta \boldsymbol{e}_r - \sin\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta$ přepsat jako

$$\boldsymbol{B} = \frac{3m\cos\vartheta}{r^3}\boldsymbol{e}_r - \frac{m}{r^3}\boldsymbol{e}_z,$$

což už je známé pole magnetického dipólu mířícího ve směru osy z.