Úloha 1

Ze zadání víme

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q'}{h}&=U,\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{h}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q'}{a}&=U',\end{aligned}$$

z čehož snadno

$$\begin{aligned}Q&=4\pi\varepsilon\frac{h^2a^2}{h^2-a^2}\left(\frac{U}{a}-\frac{U'}{h}\right),\\ Q'&=4\pi\varepsilon\frac{h^2a^2}{h^2-a^2}\left(\frac{U'}{a}-\frac{U}{h}\right),\end{aligned}$$

a protože náboje na koulích se nezmění, bude po vzdálení do nekonečna

$$\begin{aligned}U_\infty&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a}=\frac{h^2}{h^2-a^2}\left(U-\frac{a}{h}U'\right),\\ U'_\infty&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q'}{a}=\frac{h^2}{h^2-a^2}\left(U'-\frac{a}{h}U\right).\end{aligned}$$

Úloha 2

Dráty označíme zleva jako první, druhý a třetí s fázovými posuny $-\frac{2\pi}{3}$, 0 a $\frac{2\pi}{3}$. Dále amplituda napětí je U, 12 metrů je l a poloměr drátů $a = 10\,\mathrm{cm}$. Protože je země uzemněná, musí na ní být všude nulový poteniál a tři vodiče na ní tak indukují náboje. S tím se vypořádáme umístěním zrcadlových drátů pod povrch zemský. Když nyní budeme počítat příspěvek k napětí mezi zemí a dráty od jednotlivých drátů, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}&2\pi\varepsilon U\sin(\omega t-\tfrac{2\pi}{3})\\ &\quad=\sigma_1\left(\ln\tfrac{l}{a}+\ln\tfrac{2}{1}\right)+\sigma_2\left(\ln\tfrac{\sqrt2}{1}+\ln\tfrac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)+\sigma_3\left(\ln\tfrac{\sqrt5}{2}+\ln\tfrac{2\sqrt2}{5}\right)\\ &\quad=\sigma_1\ln\frac{2l}{a}+\sigma_2\ln\sqrt5+\sigma_3\ln\sqrt2,\\ &2\pi\varepsilon U\sin\omega t\\ &\quad=\sigma_1\left(\ln\tfrac{\sqrt2}{1}+\ln\tfrac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)+\sigma_2\left(\ln\tfrac{l}{a}+\ln\tfrac{2}{1}\right)+\sigma_3\left(\ln\tfrac{\sqrt2}{1}+\ln\tfrac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)\\ &\quad=\sigma_1\ln\sqrt5+\sigma_2\ln\frac{2l}{a}+\sigma_3\ln\sqrt5,\\ &2\pi\varepsilon U\sin(\omega t+\tfrac{2\pi}{3})=\sigma_1\ln\sqrt2+\sigma_2\ln\sqrt5+\sigma_3\ln\frac{2l}{a},\end{aligned}$$

což je lineární soustava tří rovnic

$$2\pi\varepsilon U\begin{pmatrix}\sin(\omega t-\frac{2\pi}{3})\\ \sin(\omega t)\\ \sin(\omega t+\frac{2\pi}{3})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln\frac{2l}{a} & \ln\sqrt{5} & \ln\sqrt{2}\\ \ln\sqrt{5} & \ln\frac{2l}{a} & \ln\sqrt{5}\\ \ln\sqrt{2} & \ln\sqrt{5} & \ln\frac{2l}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}.$$

Jejím řešením, které zde pro stručnost nebudeme vypisovat, dostaneme hustoty σ_i jako funkce napětí. Výsledné pole[1] pod druhým drátem u země bude potom

$$-2\pi\varepsilon E_z=2\left(\frac{\sigma_1}{l\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma_2}{l}+\frac{\sigma_3}{l\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$-2\pi\varepsilon lE_z=\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3,$$

kde dvojka před závorkou je za zrcadlové dráty. Dosazením vztahů pro σ_i a upravením vzniklého výrazu potom

$$E_z=-\frac{U}{l}\frac{1}{2\ln^2\frac{2l}{a}+\ln 2\ln\frac{2l}{a}-\ln^2 5}$$
$$\left[\left(\frac{4\ln^2\frac{2l}{a}-2\ln 2\ln\frac{2l}{a}}{\ln\frac{2l^2}{a^2}}-2\ln 5\right)\left[\sin(\omega t+\tfrac{2\pi}{3})+\sin(\omega t-\tfrac{2\pi}{3})\right]\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\ln 2\ln 5-2\ln\frac{2l}{a}\ln 5}{\ln\frac{2l^2}{a^2}}+\ln\frac{2l^2}{a^2}\right)\sin\omega t\right]$$

Vyčíslením logaritmů dostaneme přibližně

$$E_z\approx-\frac{U}{l}\times 0.18\times\left[\sin(\omega t+\tfrac{2\pi}{3})+2\sin\omega t+\sin(\omega t-\tfrac{2\pi}{3})\right]$$
$$=-\frac{U}{l}\times 0.18\times\sin\omega t.$$

Výsledné pole u země tedy kmitá se stejnou frekvencí a fází[2] jako prostřední drát a amplitudou

$$E_{z0}\doteq 8.5\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}.$$

Úloha 3

Nejprve spočítáme radiální složku gradientu potenciálu. Je

$$E_r=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}\sin^2\theta\left(\frac{1}{a}U\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{a}{r^2}U'\left(\frac{a}{r}\right)\right).$$

[1] Díky zrcadlovým nábojům je nenulová pouze vertikální složka.

[2] Když je na drátu kladné napětí, pole míří zřejmě dolů.

Z Gaussova zákona je nyní náboj uvnitř koule roven toku pole z povrchu koule vynásobenému permitiviou. A ten je zase kvůli vhodným sférickým souřadnicím roven prostému integrálu radiální složky. Tedy

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-1} \sin^2\theta \left(\frac{U(1)}{a} + \frac{U'(1)}{a} \right) a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi\varepsilon a}{\mathrm{e}} [U(1) + U'(1)] \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{8\pi\varepsilon a}{3\mathrm{e}} [U(1) + U'(1)]. \end{aligned}$$

Pokud bychom zadání pochopili jinak, bylo by

$$\begin{aligned} U(x) &= Ux, \qquad U'(x) = U \\ U(1) &= U, \qquad U'(1) = U \end{aligned}$$

a tedy

$$Q = \frac{16\pi\varepsilon a U}{3\mathrm{e}}.$$

Úloha 4

Je zřejmě třeba najít vhodnou isočáru, která charakterem odpovídá hoře Říp. Z levého obrázku vidíme, že poměr poloměru základny kopce a jeho výšky je zhruba 2 : 1. Isočára $\Phi = 0.3$ tomuto odpovídá poměrem 1.6 : 0.8 = 2 : 1. Pole získáme jako gradient potenciálu, který má z grafu a symetrie převážně vertikální složku. Tedy

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -1 + \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Pro $R = 0$ dostaneme $E_z = -1 - 2/z^3$ a pro $R = \infty$ zase $E_z = -1$.[3] Dosazením $z = 1.1$, což vyčteme z grafu na obrázku, je potom pole na vrcholu asi 2.5krát silnější než pole ve vesnici.

[3] Vesnice není na úpatí, ale je od něj spíš nějaký kus vzdálena.